Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Winterfeld, Moritz Adolph von

Anfangsgründe der Mathematik zum Gebrauch in Schulen und für Selbstlehrlinge

Bd.: Vierter Teil

Braunschweig 1807

Math.u. 212 m-4
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594365-0
(null)

Winterfeld
Un.
2m – 4

<36636477160016
<36636477160016
Bayer. Staatsbibliothek

Material	1 fl.	30 x
Lig.	— —	14 —
	1 fl.	44 x rh

dtt.

AnfangsGründe

der ebenen

Trigonometrie,

in

sokratischer LehrArt abgefasst

von

M. A. von Winterfeld,

königl. preussischen Major.

Braunschweig, 1807

in der SchulBuch-Handlung.

AnfangsGründe der Mathematik,

zum Gebrauch für Schulen und für Selbstlehrlinge,

in sokratischer LehrArt abgefasst

von

M. A. von Winterfeld,
königl. preussischen Major.

Vierter Teil,

welcher die Trigonometrie enthält.

Braunschweig, 1807
in der SchulBuch-Handlung.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Anfangs Gründe der Geometrie.

Siebentes Buch: Die ebene Trigonometrie.

I. Von den trigonometrischen Linien: § 1—60.

II. Zusammensetzung der trigonometrischen Linien: § 61—79.

III. Von den trigonometrischen Tafeln: § 80—105.

IV. Trigonometrische Auflösung der Dreiekke: § 106—142.

V. Anwendung der Trigonometrie auf das Feldmessen: § 143—145.

VI. Trigonometrische KreisRechnung: § 146—165.

Vorrede.

Die Trigonometrie, wenn man sich nicht mit oberflächlicher Kentniß derselben begnügen wil, ist eine schwere Wissenschaft: doch habe ich mich bestrebt, sie Anfängern möglichst zu erleichtern. In der Ordnung des Vortrages bin ich gröstenteils Lorenzen gefolgt, weil sein Gang mir der natürlichste schien: meine Arbeit kann daher der seinigen zum Commentar dienen.

Ueberflüssigkeit hielt ich verzeihlicher als Mangel, weil es leichter ist das Ueberflüssige zu überschlagen, als das Fehlende zu ergänzen: daher war Vollständigkeit mein zweites Bestreben. Wem damit nicht gedient ist, der kan nicht nur alle mit Sternchen bezeichneten Stellen, sondern auch die ganze zweite Abteilung überschlagen.

Den ausschlieslichen Gebrauch der Decimal-Einteilung des Kreises hielt ich noch zu früh: doch habe ich das Meinige zu BekantMachung derselben beigetragen.

Daß ich die ebene Trigonometrie der körperlichen Geometrie voranschikke, bedarf, nach Karstens und Mönnichs Vorgange, wol keiner Rechtfertigung mehr: doch wil ich den von Lezterm, in der Vorrede seines LehrBuchs angeführten Gründen dieser Anordnung noch den hinzufügen, daß ich die ebene Trigonometrie nicht nur leichter, sondern auch nüzlicher halte als die Stereometrie. An dieser ist nun die Reihe, und sie sol, nebst der sphärischen Trigonometrie nächstens folgen.

Noch dient zur Nachricht, daß die in diesem Bande vorkommenden Citationen des ersten und zweiten Teils sich auf die zweite Ausgabe desselben beziehn.

Niden in der UkerMark, den 28sten Febr. 1806.

I.

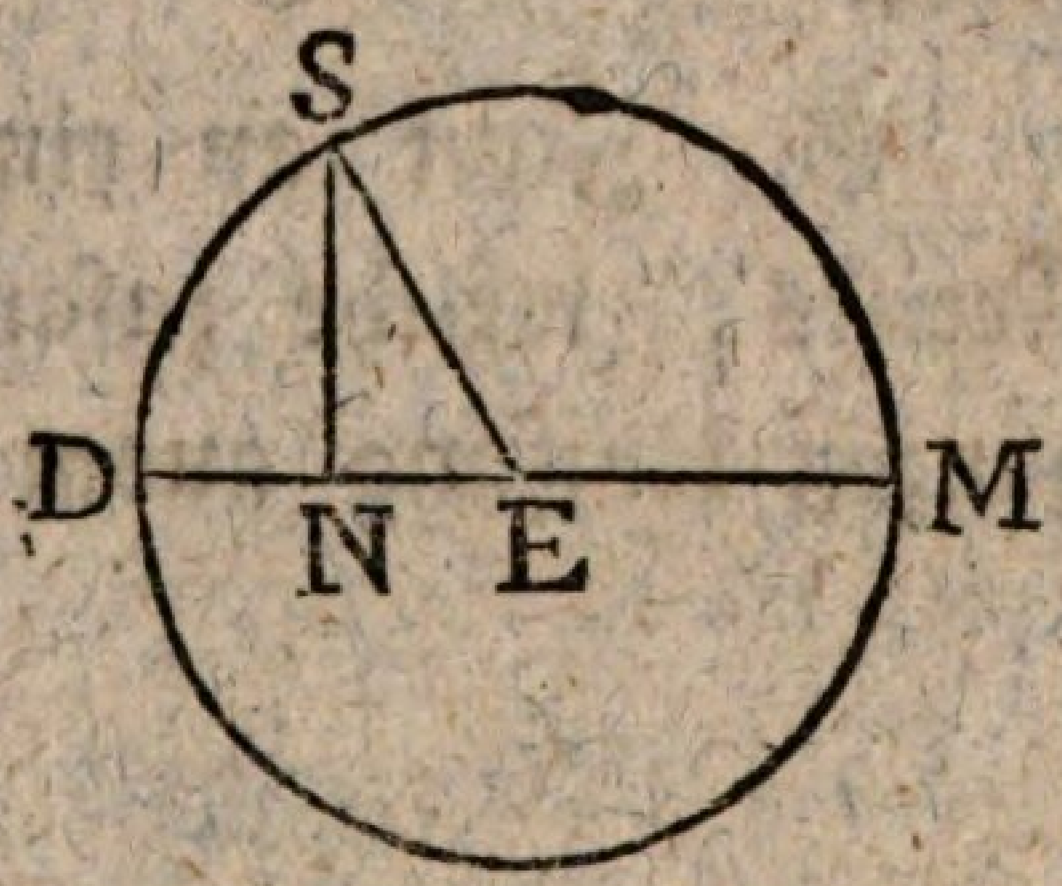
Erklärungen der trigonometrischen Linien.

---

§ 1.

Erste Erklärung.

L. In einem beliebigen Kreise wird ein Durchmesser DEM, und ein auf diesem schief stehender Halbmesser ES; und von dieses Halbmessers EndPunkte S, auf den Durchmesser eine senkrechte Linie SN, gezogen. Diese Linie SN ist Sinus aller Bögen, welche von dem Durchmesser DM und dem Halbmesser ES begrenzt werden. Welches sind die?



S. Erstens der Bogen DS, zweitens SM, drittens MDS, und viertens SMD.

L. Recht! Diese vier Bögen haben alle einerlei Sinus SN. Wie würde nun die Erklärung zu fassen seyn, so daß sie auf alle vier Fälle passte?

S. Der Sinus eines Bogens ist eine von des Bogens einem EndPunkte auf den das andere Ende begrenzenden Durchmesser senkrecht fallende Linie.

* § 2.

L. Geht man mehr als ein Mal im Kreise herum, so erhält man Bögen, welche grösser sind als der Umfang, wie SMDSM, SMDSMD, SMDSMDS ꝛc., und auch auf diese passt die Erklärung, und sie haben mit SD einerlei Sinus SN. *

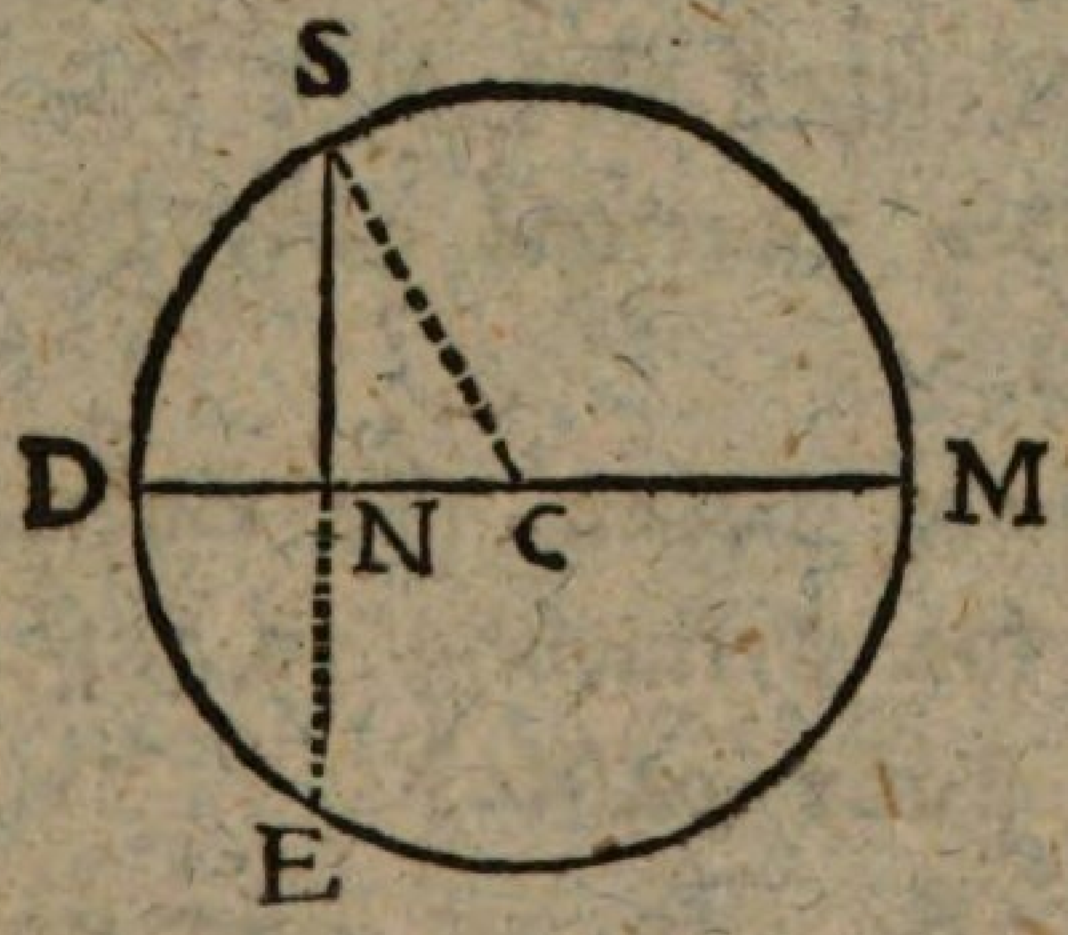
§ 3.

L. Die Bögen SD mehr SM sind dem halben, und die SM mehr MDS dem ganzen Umfange gleich. Aus dieser Bemerkung, und der Erklärung § 1, nach welcher sie alle einerlei Sinus haben, fliesst eine Lehre.

S. Zwei an einander liegende Bögen eines Kreises, welche zusammen den halben, oder den ganzen Umfang ausmachen, haben einerlei Sinus.

§ 4.

L. Der Sinus SN wird verlängert, bis er den Umfang zum zweiten Mal trift in E. — Was für eine Linie ist nun SE?



S. Eine Sehne der Bögen SDE und SME (G. § 170).

L. Und die Teile SN, EN, sind die gleich, oder ungleich?

S. Der Halbmesser schneidet die Sehne senkrecht (§ 1); folglich

SN = EN (G. § 177).

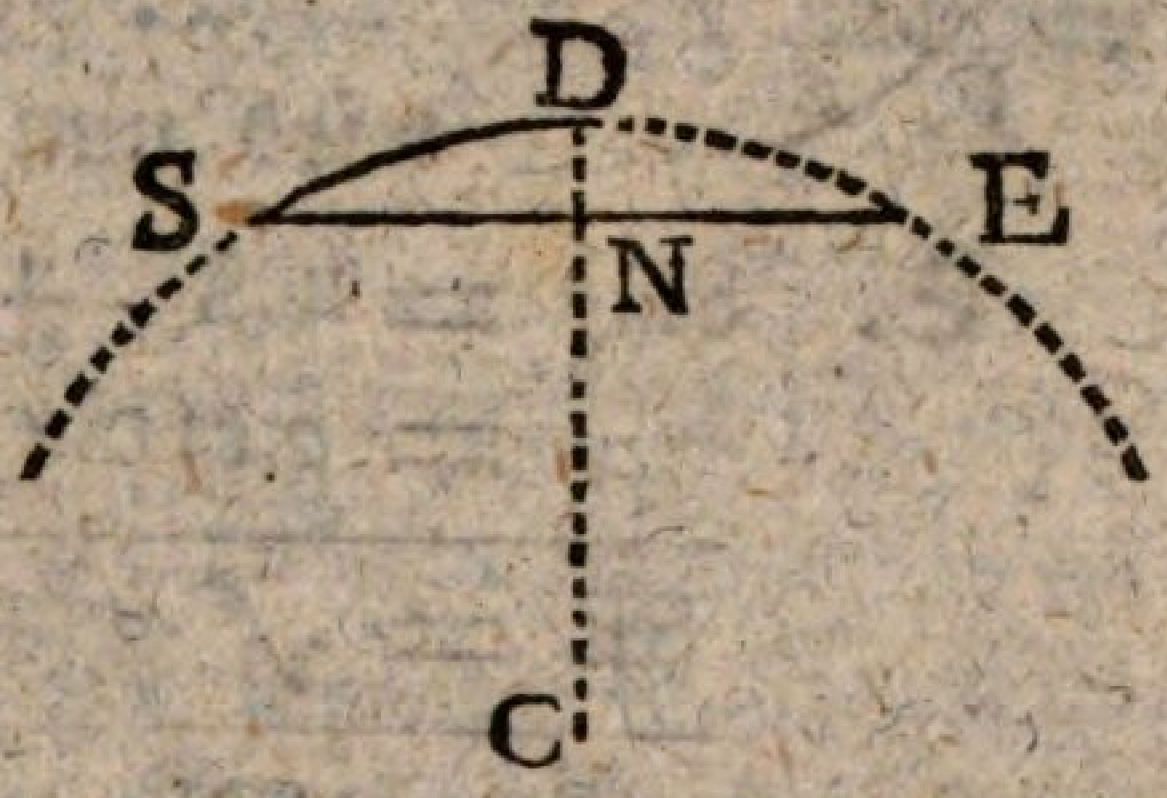
L. Aber von den Bögen DS und DE, welcher ist da der größte?

S. DS = DE (G. § 208).

L. Also SN = $\frac{1}{2}$ SNE
und SD = $\frac{1}{2}$ SDE.

Man kan hieraus die Lehre ziehn: SN, der Sinus eines Bogens DS, ist die Hälfte der Sehne SNE des doppelten Bogens SDE = 2 DS.

§ 5.



L. Es sei der Bogen SDE = 60°; wie groß ist dan dessen Sehne SE?

S. Die Sehne eines Bogens von 60 Grad ist dem Halbmesser gleich (G. § 234); folglich

SNE = CD.

L. Aber wie groß ist der Bogen SD?

S. Wenn SDE = 60°
so ist SD = 60° : 2 = 30° (G. § 208).

L. Also SNE = CD

$\frac{1}{2}$ SNE = SN = Sin. 30° = $\frac{1}{2}$ CD.

Welche Lehre kan man hieraus ziehn?

S. Der Sinus eines Bogens von 30 Grad ist dem halben Halbmesser gleich.

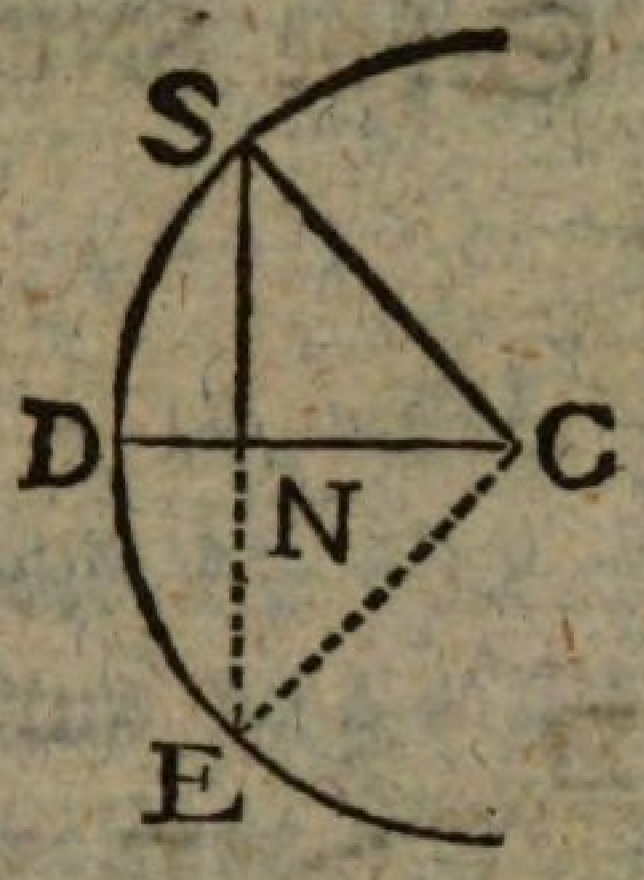
L. Der Halbmesser wird gewöhnlich durch r bezeichnet, und dient zum MaaßStabe der trigonometrischen Linien. Die Formel für den Sinus von 30 Grad ist also:

Sinus 30° = $\frac{r}{2}$.

Wenn man nun den Halbmesser r = 1 annimt, wie groß ist dan der Sinus 30 Grad?

S. Ist r = 1
so ist Sin. $30^\circ = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

§ 6.



L. Gesetzt der Bogen SDE wäre 90 Grad, wie groß wäre dan der Winkel SCE?

S. Auch 90 Grad (G. § 220).

L. Also ein rechter Winkel. Wie wird nun SNE gefunden?

S. $SE^2 = CS^2 + CE^2$ (G. § 160)
$= 2(CS^2)$ (G. § 21)

$$SE = \sqrt{2(CS^2)} = CS\sqrt{2}.$$

L. $\frac{1}{2} SE = SN = \frac{1}{2} CS\sqrt{2}$.
Welche trigonometrische Bedeutung aber hat SN?

S. SN = Sin. SD = Sin. 45° (G. § 208).

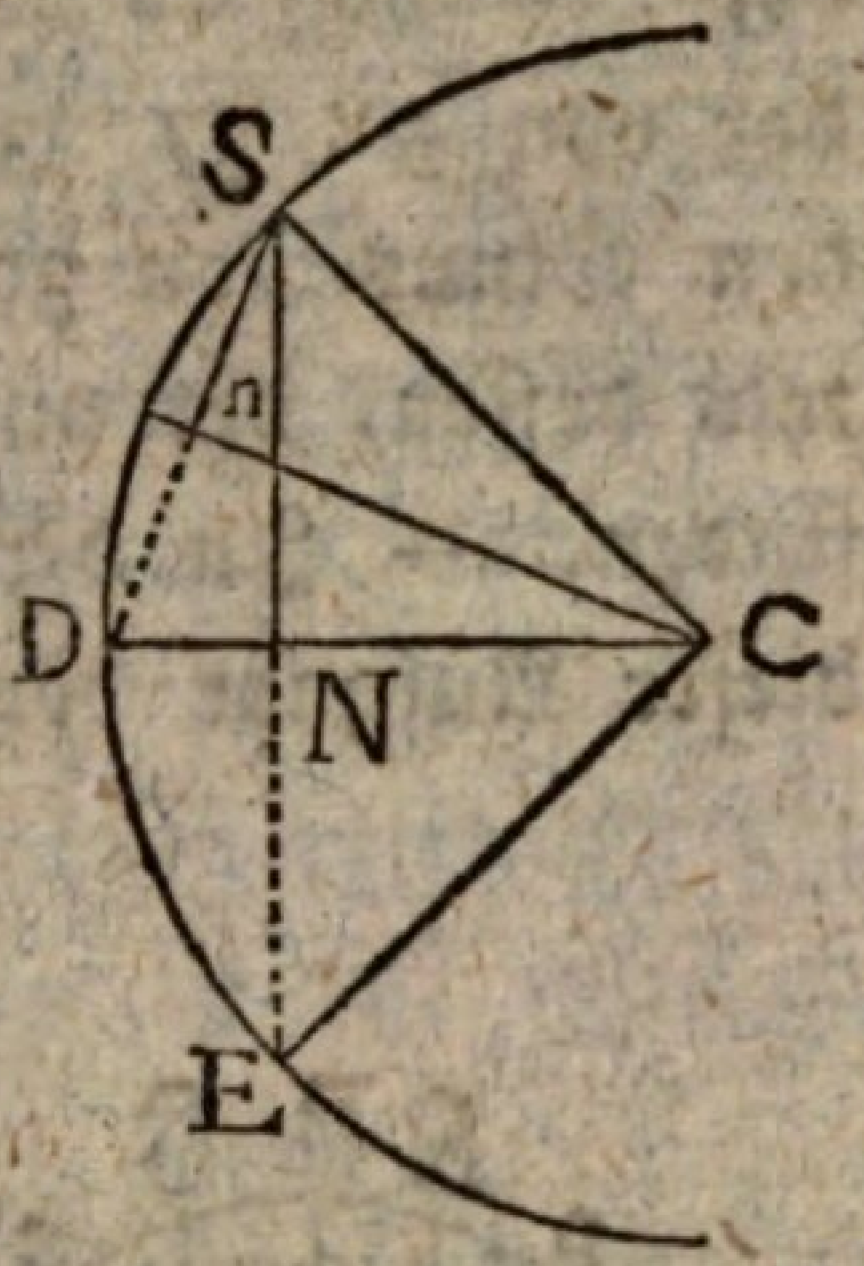
L. Also SN = Sin. $45^\circ = \frac{1}{2} CS\sqrt{2}$
Oder Sin. $45^\circ = \frac{1}{2} r\sqrt{2}$ (§ 5).
Wie wird dieses in Worte übertragen?

S. Der Sinus eines Bogens von 45 Grad ist gleich dem halben Produkte des Halbmessers in die QuadratWurzel von 2.

L. Es sei r = 1, welches ist der Sinus 45?

S. Ist r = 1,
so ist $\frac{1}{2} r\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 1{,}414213565 : 2$
$= 0{,}707106782$.

§ 7.



L. SN = Sinus SD ist also bekant: wie wird nun Sn = Sinus SB = Sinus $\frac{1}{2}$ SD gefunden?

S. Kenne ich SN, so kenne ich auch SNE = 2 SN = Sehne des Bogens SDE; und kenne ich die Sehne des Bogens SDE, so kenne ich auch die seiner Hälfte SD = SnD (G. § 323); und kenne ich die Sehne SnD, so kenne ich auch ihre Hälfte = Sn = Sinus SB.

L. Es sei, wie G. § 323, SNE = s; welches ist die Formel für $\frac{1}{2}$ SD?

S. $SNE = 2\,SN = s$

$$SD = \sqrt{[2rr - 2r\sqrt{(rr - \tfrac{1}{4}ss)}]}$$

$$\tfrac{1}{2}SD = Sn = \sqrt{[2rr - 2r\sqrt{(rr - \tfrac{1}{4}ss)}]} : 2.$$

L. Diese Formel enthält die Auflösung der Aufgabe: **Aus dem Sinus eines Bogens den Sinus seiner Hälfte zu finden.**

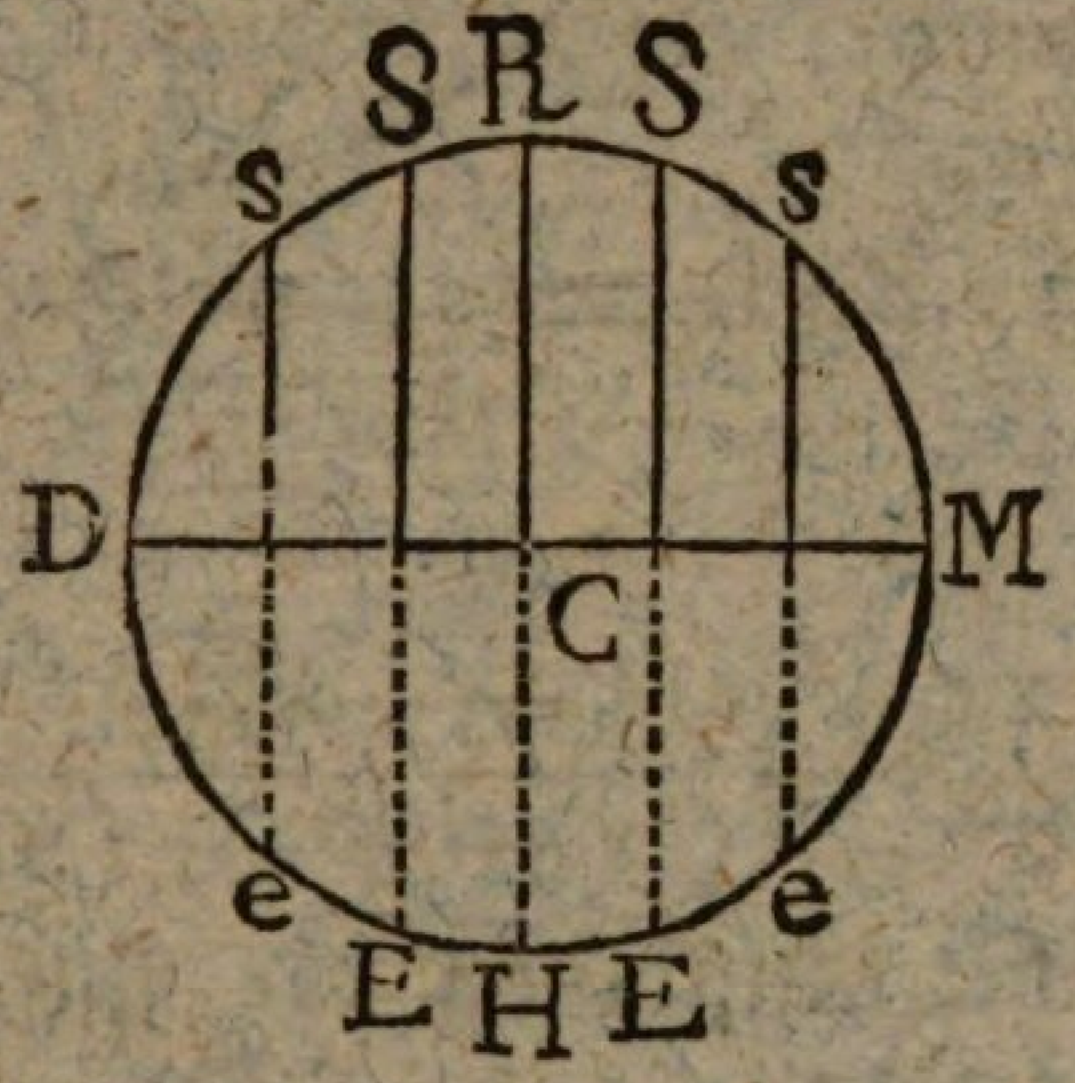
Es sei r = 1,
SN = $\frac{1}{2}$ SE = Sin. 45° = 0,707106782 (§ 6).
Welches ist Sn = Sin. (45° : 2) = Sin. 22° 30′?

S. $r = 1,\ \tfrac{1}{2}s = 0{,}707106782$

$$rr = 1^2 = 1$$
$$s = 0{,}707106782 \times 2 = 1{,}414213564$$
$$ss = 2$$
$$\tfrac{1}{4}s^2 = 2 : 4 = \tfrac{1}{2} = 0{,}5$$
$$rr - \tfrac{1}{4}ss = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$$
$$\sqrt{(rr - \tfrac{1}{4}ss)} = \sqrt{0{,}5} = 0{,}707106782$$
$$2r\sqrt{(rr - \tfrac{1}{4}ss} = 2 \times 0{,}70710678 = 1{,}414213564$$
$$\sqrt{[2rr - 2r\sqrt{(rr - \tfrac{1}{4}ss)}]} = \sqrt{(2 - 1{,}414213564)}$$
$$= \sqrt{0{,}585786435} = 0{,}7653668 \ldots$$
$$\sqrt{[2rr - 2r\sqrt{(rr - \tfrac{1}{4}ss)}]} : 2 = 0{,}7653668 \ldots : 2$$
$$= 0{,}3826834 \ldots$$
$$= Sn = Sin.\ 22^\circ\ 30'.$$

Aus dem Sinus dieses Bogens wird wiederum der des Bogens von 11° 15′; aus dem von 11° 15′ der von 5° 37′ 30″ gefunden. Und da wir auch den Sinus von 30 kennen (§ 6), so lässt sich Mittels dessen, der von 15°, von 7° 30′, von 3° 45′ ꝛc. finden. — In der Folge werden leichtere Auflösungen dieser Aufgabe vorkommen (§ 71).

§ 8.



L. Welche von zwei Sehnen ist die längste? die dem MittelPunkte nähere SE, oder die entferntere se?

S. Die dem MittelPunkte nähere SE (G. § 191).

L. Recht! Die Sehnen wachsen, je mehr sie sich dem MittelPunkte nähern, und nehmen ab, je weiter sie sich von ihm entfernen. Ein Gleiches gilt von ihren Hälften (G. § 44). Die Sinusse aber sind HalbSehnen (§ 4): folglich gilt auch von ihnen, was von den Sehnen und halben Sehnen gilt. Was ist das?

S. Die Sinusse wachsen, wan sie sich dem MittelPunkte nähern, und nehmen ab, wan sie sich von ihm entfernen.

L. Und das zu beiden Seiten. — Welches ist der größte Sinus?

S. Der dem MittelPunkte am nächsten kömt, das ist der Halbmesser selbst (G. § 190).

L. Man nennt daher den Halbmesser den Sinus totus oder ganzen Sinus, und betrachtet alle andere Sinusse als Teile desselben.

§ 9.

L. Der Bogen Null, welchen Sinus hat der?

S. Der Sinus des Bogens Null ist Null.

L. Recht! Wird aber der Bogen grösser, als Null, so wächst auch sein Sinus: aber wie lange wächst er?

S. Bis er dem Halbmesser gleich wird (§ 8).

L. Aber welches Bogens Sinus ist der Halmesser oder Sinus totus?

S. Der Halbmesser oder Sinus totus ist der Sinus des rechten Winkels (§ 1. G. § 49, 26).

L. Wenn man nun über 90 Grad hinausgeht, wie wird es dan mit den Sinussen? Wachsen sie noch?

S. Nein! Die Sinusse über 90 Grad nehmen ab (§ 8).

L. Und wie lange nehmen sie ab?

S. Bis zum Halbkreise, oder 180 Grad, da sie gänzlich verschwinden.

L. Und die Sinusse über 180 Grad?

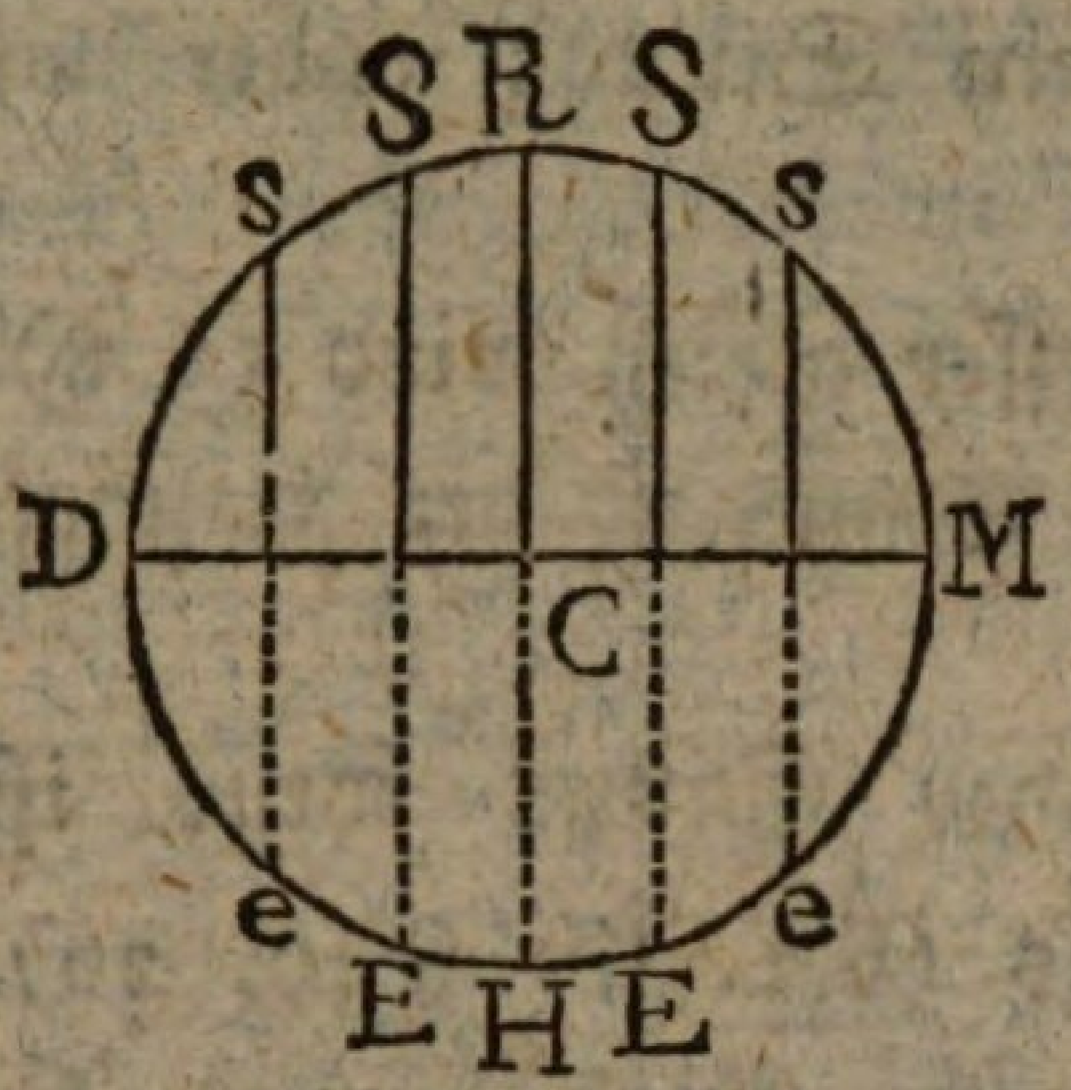
S. Die nehmen wieder zu bis 270 Grad, da der Sinus zum zweiten Mal dem Halbmesser gleich wird.

L. Und von 270 Grad weiter?

S. Nehmen sie wieder ab bis 360 Grad, wo der Sinus zum zweiten Mal verschwindet.

L. Alles richtig! Nun ist zu merken, daß die Sinusse, nachdem sie bei M und D verschwunden sind, beim weiter vorwärts Gehen zwar wieder zum Vor-

schein kommen, aber in entgegen stehender Richtung, welche man verneint nennen kan, wenn man die erste bejaht annimt, und bejaht, wenn die erste verneint ist. Teilt man daher den Kreis in vier ViertelKreise



oder Quadranten, und nennt DCR den ersten, RCM den zweiten, MCH den dritten, und HCD den vierten, und nimmt die Sinusse der beiden ersten bejaht an, so sind die der beiden lezten verneint und umgekehrt.

Welche Sinusse also stehn einander entgegen?

S. Die Sinusse der beiden ersten Quadranten stehn denen der beiden lezten entgegen.

* § 10.

L. Geht man mehr als ein Mal auf dem Umfange herum (§ 2), so werden die Sinusse des fünften Quadranten wieder denen des ersten, und die des sechsten denen des zweiten, die des siebenten denen des dritten, die des achten denen des vierten, die des neunten wieder denen des ersten gleich, und so fort. *

§ 11.

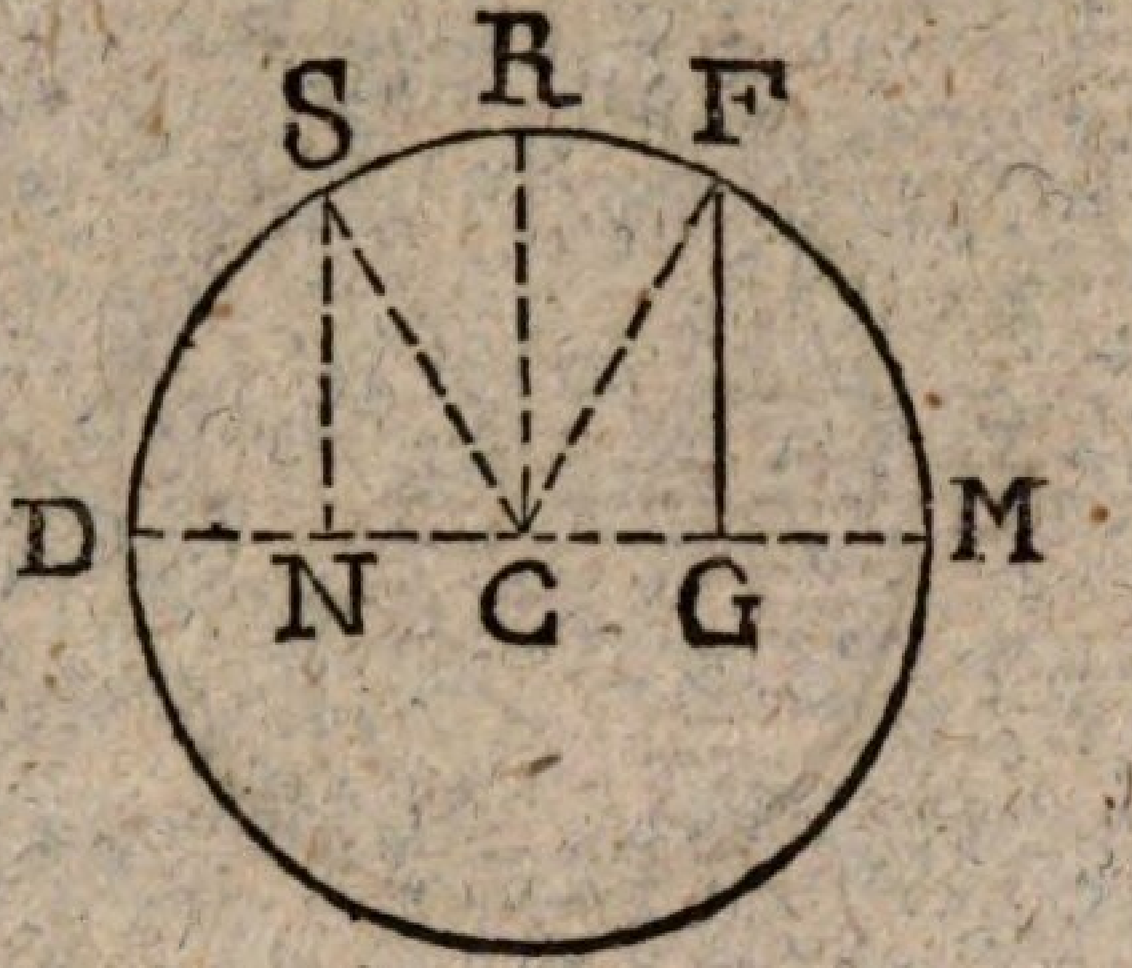
L. In einerlei Halbkreise sei

DS = MF

so ist SF + DF = SF + MF (G. § 36)

oder DSF = SFM.

Daß die an einander liegenden Bögen, DS und SFM,



einerlei Sinus haben, ist schon entschieden (§ 3): haben aber auch zwei auf einander liegende, den vorigen gleiche Bögen DS und DSF auch einerlei Sinus? — Welches ist der Sinus von DS?

S. Sinus DS = SN (§ 1).

L. Und der von DSF?

S. Sinus DSF = FG.

L. Und diese Sinusse SN und FG, sind sie einander gleich, oder ungleich?

S. Sie sind einander gleich; denn

DS = MF (VorausSetz.)

∠ DCS = GCF (G. § 214)

Ferner ∠ CNS = ∠ CGF (G. § 49)

und CS = CF (G. § 21)

△ CSN ≌ △ CFG (G. § 95)

SN = FG (G. § 24)

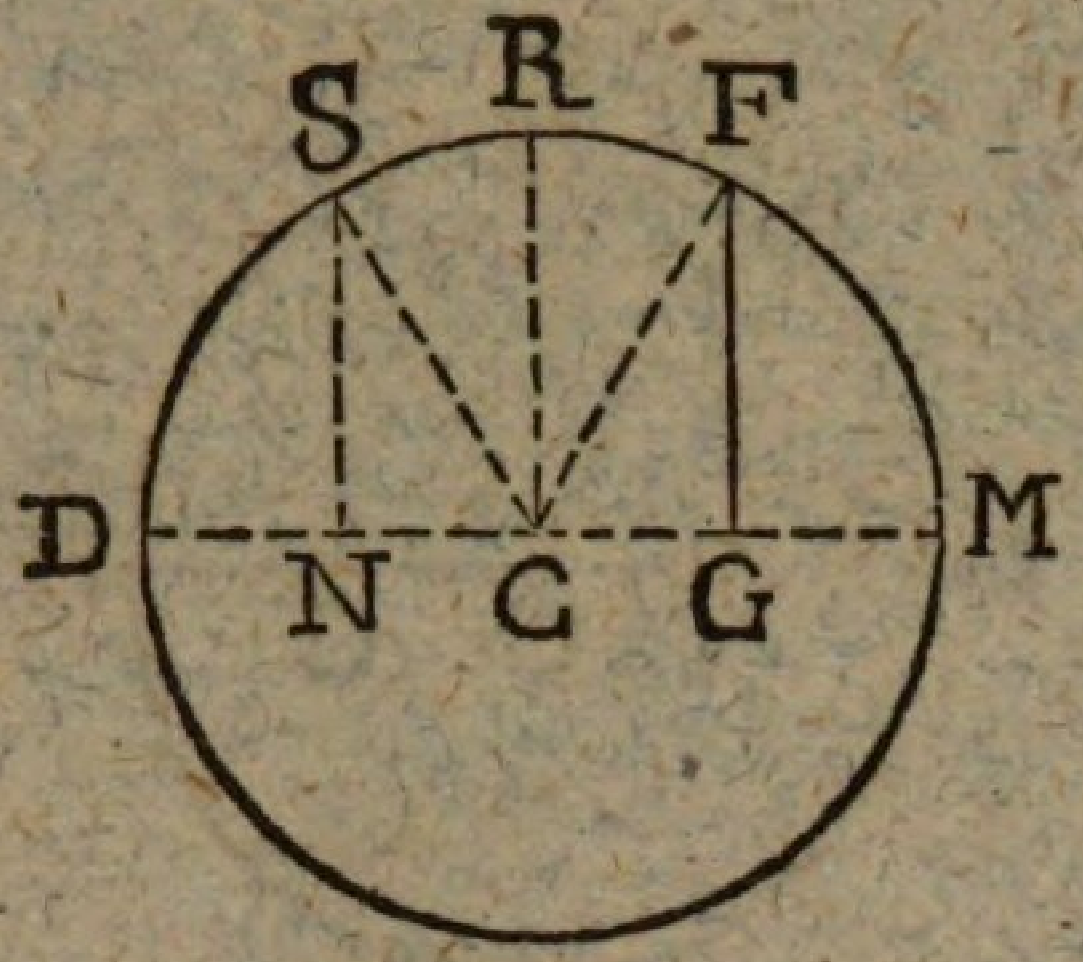
oder Sinus DS = Sinus DSF (§ 1).

L. Aus dem Beweise folgt nur, daß beide Sinusse gleich lang sind; sind sie aber auch gleichartig? das heisst, beide bejaht, oder beide verneint?

S. Ja, nach § 9.

L. Linien aber, welche gleich und gleichartig sind, lassen sich nicht unterscheiden, und können für einerlei angenommen werden (G. § 24). — Was können wir hieraus lernen?

S. Zwei Bögen, welche sich einander zum Halbkreise ergänzen, sie mögen unter= oder



auf einander liegen, haben einerlei Sinus.

L. Es stehe der Halbmesser CR senkrecht auf dem Durchmesser DM. Welcher der Bögen RS und RF ist nun der größte?

S. DS = MF (VorausSetz.)

RS = RF (G. § 37).

L. Dem Bogen DS also fehlt zum Viertelkreise so viel als der andere DSF darüber hat. Beide unterscheiden sich also von ihm gleich stark. Man kan also den Satz auch so ausdeuten: Bögen, welche sich vom ViertelUmfange zu beiden Seiten gleich stark unterscheiden, haben einerlei Sinus. — Welcher Sinus ist nun dem von 120 Grad gleich?

S. $90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$
und $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$
folglich Sinus 120° = Sinus 60°.

L. Und dem Sinus von 150 Grad?

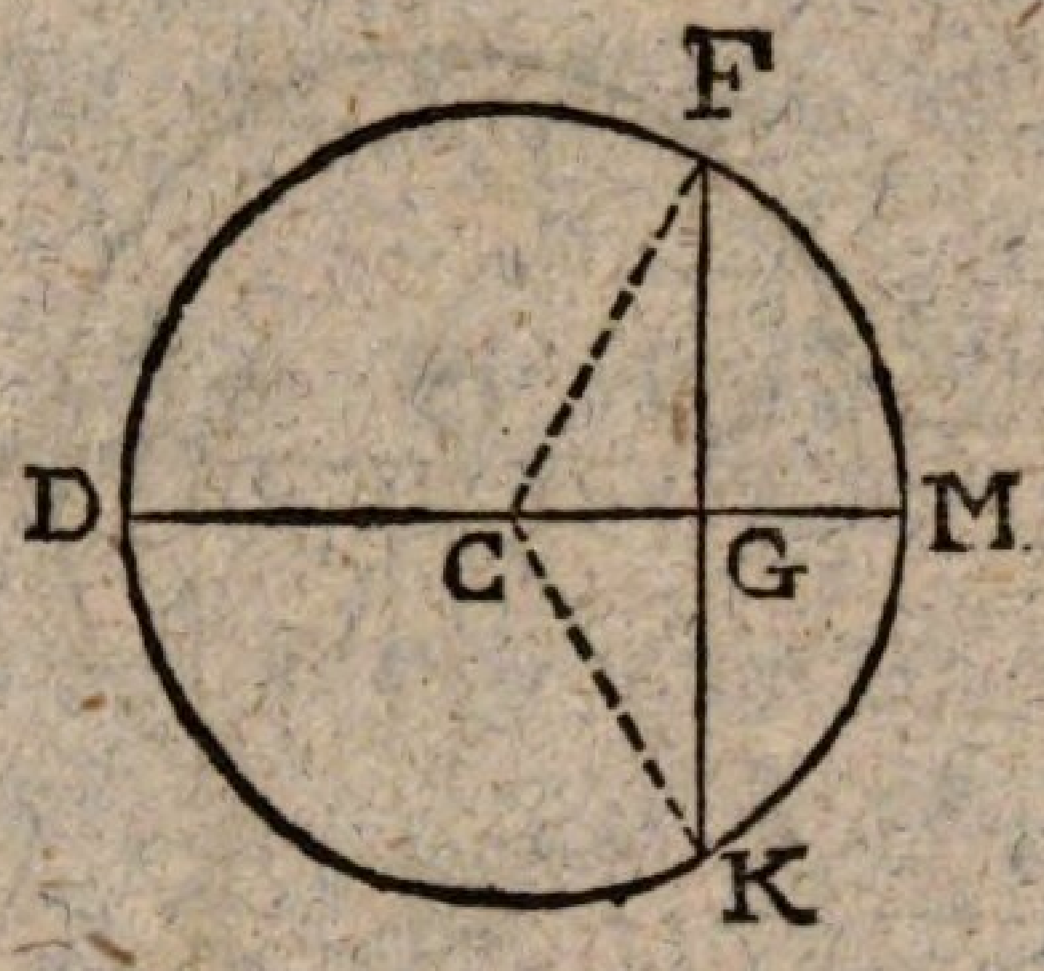
S. $90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$
$90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

Sinus 150 = Sinus 30°.

* § 12.

L. CS und SN können wegfallen; FG aber wird verlängert, bis sie den entgegenstehenden Umfang erreicht in K. — Des Bogens DF Sinus bleibt FG; welches aber ist der des Bogens DFK?

S. Sinus DFK ist KG (§ 1).



L. Und welcher von beiden Sinussen ist der längste?

S. FG = KG (G. § 177).

L. Aber von den Bögen MF und MK, welcher ist da der größte?

S. Auch die sind gleich (G. § 208).

L. Dem Bogen DF fehlt also zum Halbkreise so viel, als der andere DFK drüber hat. Beide unterscheiden sich folglich, zu beiden Seiten, vom halben Umfange gleich viel; und beide haben gleiche Sinusse FG = KG. Aber haben beide Sinusse auch einerlei Richtung?

S. Nein; sie haben entgegen gesetzte Richtungen?

L. Und was folgt daraus?

S. Wenn der eine bejaht ist, so ist der andre verneint (§ 9).

L. Welche Lehre können wir hieraus ziehen?

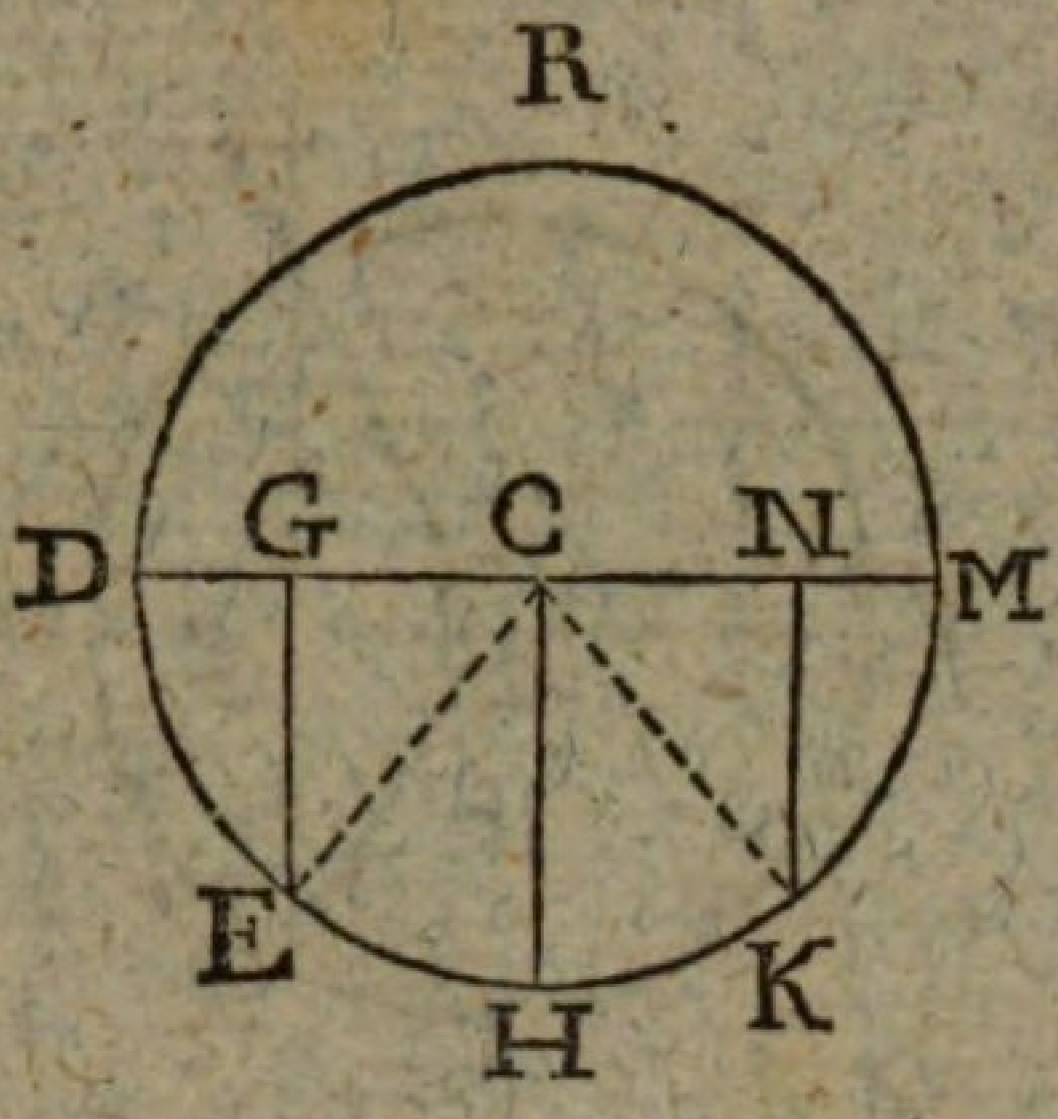
S. Zwei Bögen, welche vom halben Umfange, oder 180 Grad, zu beiden Seiten gleich viel unterschieden sind, haben gleiche, aber einander entgegen gesetzte Sinusse.

L. Es sei der Halbmesser = r; und der Bogen MF = MK = 30°; so ist

$$\left.\begin{array}{l}(\text{Sin. MF} = \text{Sin. DF}) = +\tfrac{1}{2}r\\ (\text{Sin. MK} = \text{Sin. DMK}) = -\tfrac{1}{2}r\end{array}\right\}\ (\S\ 5).\ *$$

* § 13.

L. Auf der andern Seite des Durchmessers DM,



wird ein Halbmesser CH senkrecht gestellt, und zu beiden Seiten desselben werden zwei willkührliche aber gleiche Bögen, HK, HE, abgestekkt, und deren Sinusse KN, EG gezogen. Welcher von beiden ist nun der größte?

S. Sie sind beide gleich lang; denn

$CE = CK$ (G. § 21)

$\angle CGE = \angle CNK$ (G. § 49)

$\angle KCN = \angle ECG$

$\angle KCN \cong \triangle ECG$ (G. § 95)

$KN = EG$ (G. § 24).

L. An dem Beweise ist noch auszusetzen, daß die Gleichheit der Winkel KCN und ECG noch nicht klar ist.

S. $HCM = HCD$ (G. § 49)

$HK = HE$ (VorausSetz.)

$\angle HCK = \angle HCE$ (G. § 214)

$\angle KCN = \angle ECG$ (G. § 37).

L. Nun ist der Beweis vollständig; KN und EG aber sind Sinusse der Bögen DRK und DRE (§ 1), welche von dem Bogen $DRH = 90^\circ \times 3 = 270^\circ$ zu beiden Seiten gleich viel abweichen. Wie wird dieses alles nun kurz und verständlich ausgedrukkt?

S. Zwei Bögen, welche von 270 Grad, zu beiden Seiten gleich viel unterschieden sind, haben gleiche Sinusse.

L. Sind diese gleiche Sinusse aber gleichartig? oder sind sie einander entgegen gesetzt?

S. Sie sind beide verneint (§ 8), und also gleichartig.

L. Genauer ausgedrukkt würde die Regel also lauten : : : ?

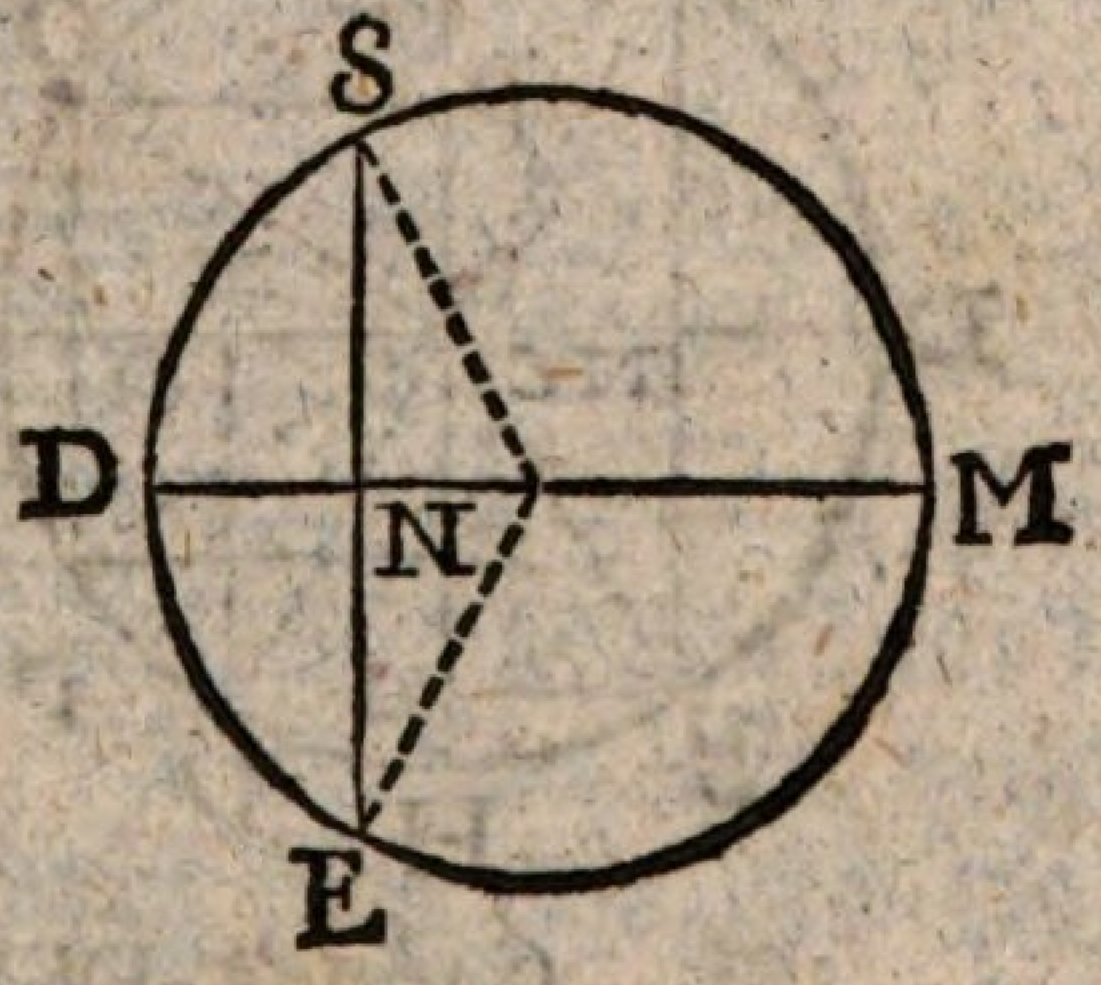
S. Bögen eines Kreises, welche von drei Viertel des Umfanges (270 Grad) zu b iden Seiten gleich viel unterschieden sind, haben einerlei Sinus. *

* § 14.

L. Wenn man den Sinus SN verlängert bis E, so ist

$$\left.\begin{array}{l} DS = DE \\ \text{oder } (SN = \text{Sin. } DS) = (EN = \text{Sin. } DE) \end{array}\right\} (\S\ 4).$$

Was lernt man hieraus?



S. Zwei gleiche Bögen zu beiden Seiten des Durchmessers haben gleiche, aber entgegen gesetzte, Sinusse.

L. Welches sind die Sinusse der Bögen

$$DSEDS = 360^\circ + DS$$
$$\text{und } DSE = 360^\circ - DE$$
$$= 360^\circ - DS \text{ (Bew.)}$$

S. $\text{Sinus } DSEDS = 360^\circ + DS = SN$

$\text{Sinus } DSE = 360^\circ - DS = EN.$

L. Aber SN = EN (Bew.)

folglich $\text{Sinus } 360^\circ + DS = \text{Sin. } 360^\circ - DS.$ jedoch mit dem Unterschiede, daß beide einander entgegen stehn.

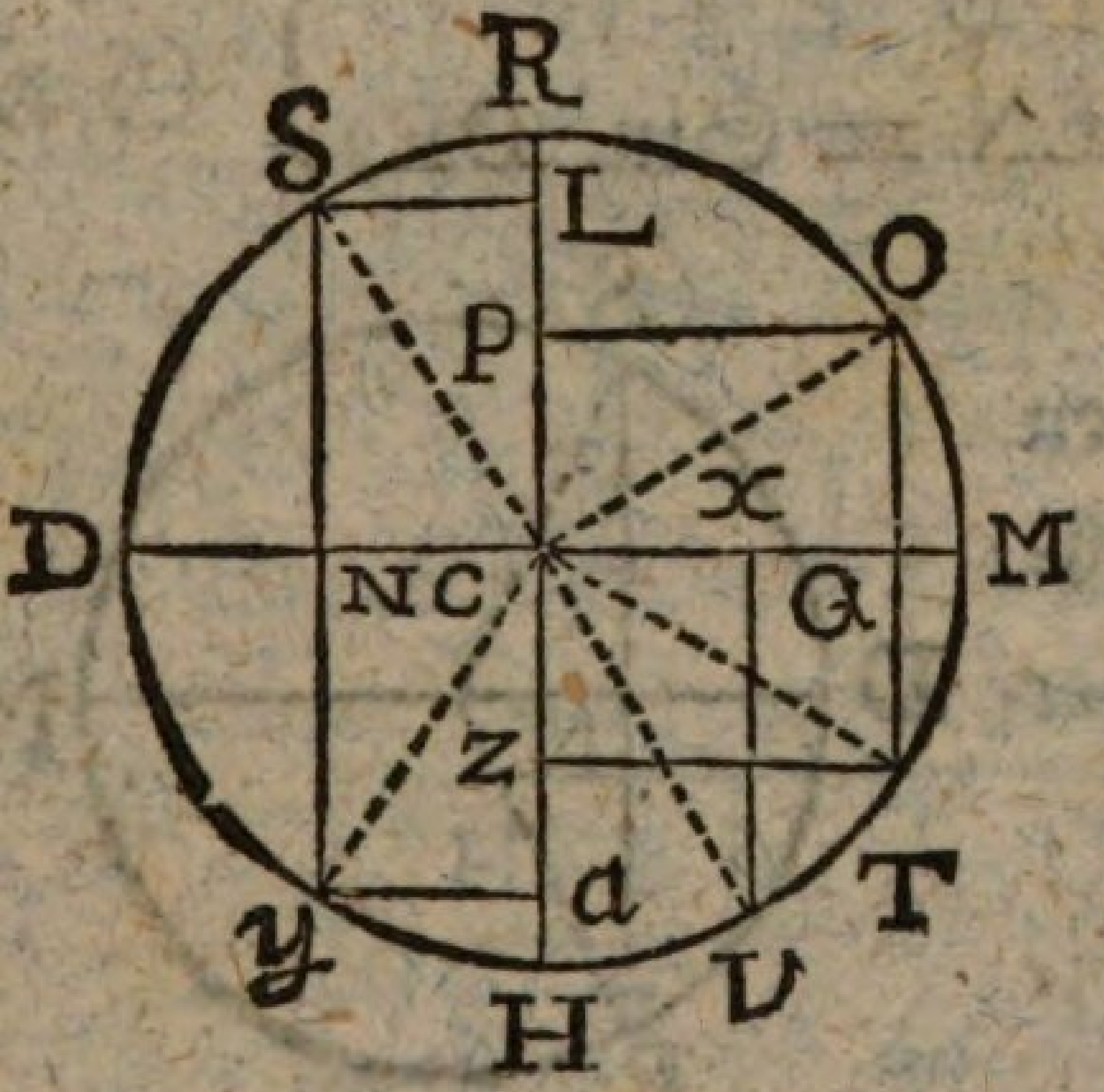
Wie würde dis, in Worte gekleidet, lauten?

S. Bögen, welche vom ganzen Umfange zu beiden Seiten gleich viel unterschieden sind, haben gleiche Sinusse.

L. Und zwar, einander entgegen stehende, wenn sie sich bis in den vierten und fünften, oder sechsten Quadranten erstrekken; einerlei aber, wenn sie im fünften und sechsten, oder siebenten und achten endigen. *

§ 15.

Zweite Erklärung.



L. Der Cosinus eines Bogens ist das zwischen dessen Sinus und dem MittelPunkte enthaltene Stükk des Halbmessers — welches ist nun des Bogens DS Cosinus?

S. Cosinus DS ist CN.

L. Und des Bogens DSO?

S. Sinus DSO = QO (§ 1):
folglich Cosinus DSO = CQ.

L. Und des Bogens DST?

S. Sinus DST = QT:
folglich Cosinus DST = CQ.

L. Und des Bogens DSV?

S. Sinus DSV = xV:
folglich Cosinus DSV = CX.

L. Und des Bogens DSY?

S. Sinus DSY = NY: folglich Cosinus DSY = CN.

L. Und des Bogens SR?

S. Sinus SR = SL folglich Cosinus SR = CL.

L. So wie mehre Bögen einerlei Sinus haben können (§ 1), so kann auch einerlei Cosinus mehren Bögen gehören. Z. B. CN, welcher Bögen Cosinus ist der?

S. CN ist Cosinus der Bögen DS und DY; DSY und DYS; DSYS und DYSY u. s. w.

§ 16.

L. Welche Bedeutung hat die auf dem Halbmesser CR senkrecht stehende Linie SL?

S. SL ist Sinus des Bogens SR (§ 1).

L. Und wie lang ist SL?

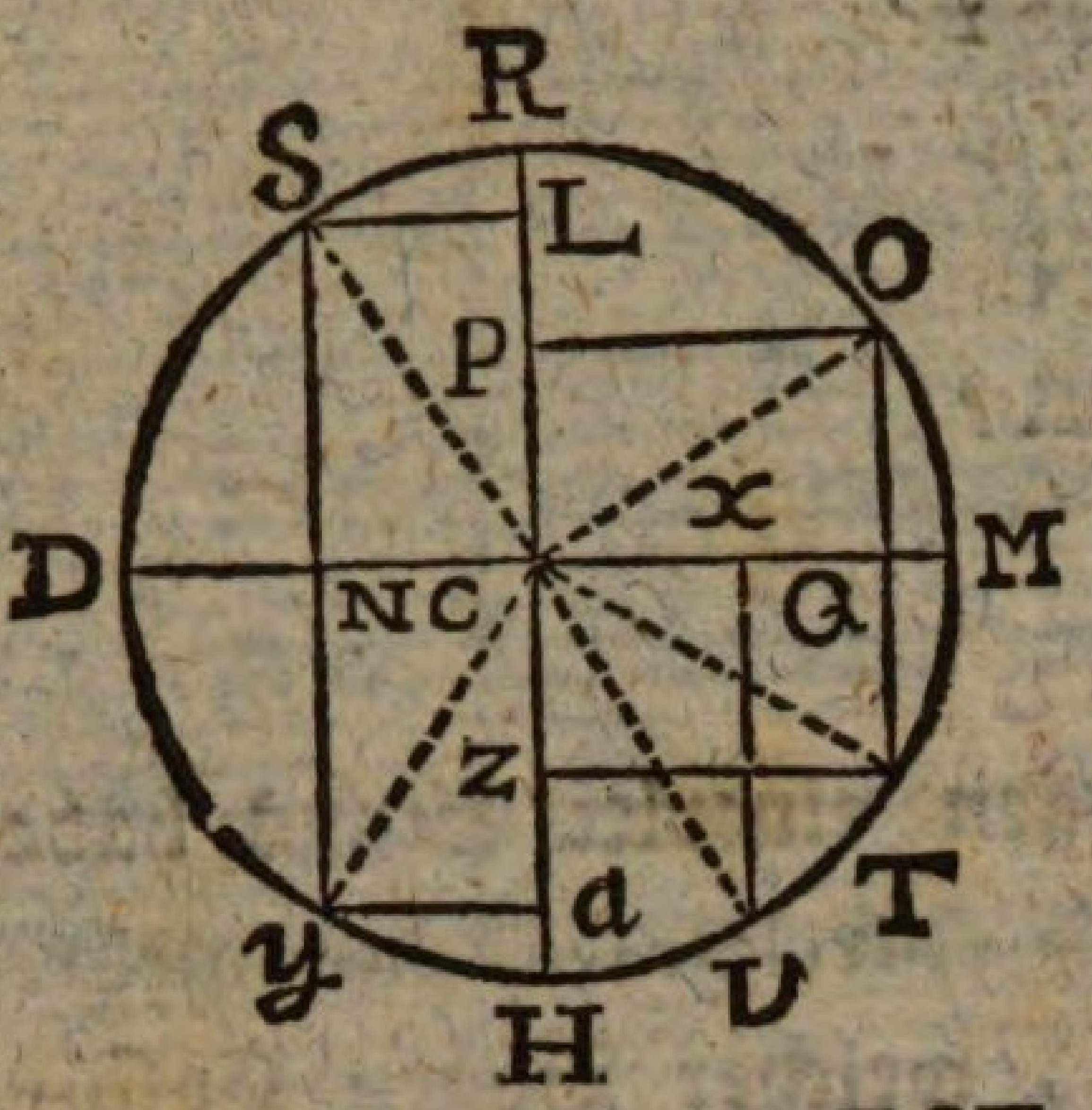
S. SLCN ist ein Parallelogramm (G. § 106, 129); folglich SL = CN und SN = CL (G. § 130).

L. Also Cosinus DS = CN = SL: das heisst CN und SL sind beide Cosinus des Bogens DS. SL aber ist zugleich Sinus des Bogens SR, welcher den Bogen DS zum Quadranten ergänzt. Also im ersten Quadranten ist der Cosinus eines Bogens gleich dem Sinus seiner Ergänzung zum Quadranten. — Welches ist hiernach der Cosinus des Bogens SR?

S. Cosinus SR = Sinus DS = SN = CL.

L. Und der Cosinus des Bogens von 45 Grad?

S. Ist gleich dem Sinus von 45 Grad = 0,707106782 (§ 6).



L. Wie ist es aber mit dem Cosinus eines Bogens über 90 Grad, wie DSO im zweiten Quadranten?

S. Cosinus DSO = CQ = OP.

L. Und eines Bogens im dritten Quadranten, wie DST?

S. Cosinus DST = CQ = OP = TGZ.

L. OP und TZ aber sind Sinusse der Bögen RO und ROT, welche der Bögen DSO und DST Ueberschüsse über den Quadranten sind. Welche Regel kann man hieraus, für die Cosinusse des zweiten und dritten Quadranten ziehn?

S. Der Cosinus eines bis in den zweiten und dritten Quadranten sich erstrekkenden Bogens ist gleich dem Sinus seines Ueberschusses über den Viertelkreis.

L. Und eines bis in den vierten Quadranten sich erstrekkenden Bogens DSY Cosinus ; ;?

S. Ist CN = SL = aY, der Cosinus seiner Ergänzung YD zum Kreise.

§ 17.

L. SN = Sin. DS = Cos. SR } (§ 16)
SL = Sin. SR = Cos. DS }

welche Lehre folgt hieraus?

S. Jeder Sinus ist Cosinus, und jeder Cosinus ist Sinus seines ErgänzungsBogens.

L. SN = Sinus DS;
folglich SL = Cosin. DS.
Rechne ich aber SL zum Sinus, was wird dan SN?
S. Ist SL = Sinus SR
so ist SN = Cosin. SR.
L. Es sei DS = 60°
folglich SR = 30°
so ist SN = Sin. 60° = Cosin. 30°
und SL = Sin. 30° = Cosin. 60°.
Was kan man hieraus lernen?

S. Macht man den Cosinus zum Sinus, so wird der Sinus dessen Cosinus, und umgekehrt.

L. Wir wollen die Richtigkeit des Satzes auch an einem Bogen über 90 Grad zeigen. — Es sei DSO = 150°; welches ist sein Sinus, und sein Cosinus?

S. Sinus DSO = OQ
Cosinus DSO = CQ = OP.

L. Und nun umgekehrt, den Cosinus zum Sinus gemacht?

S. So ist OP = Sinus OR
OQ = Cosin. OR.

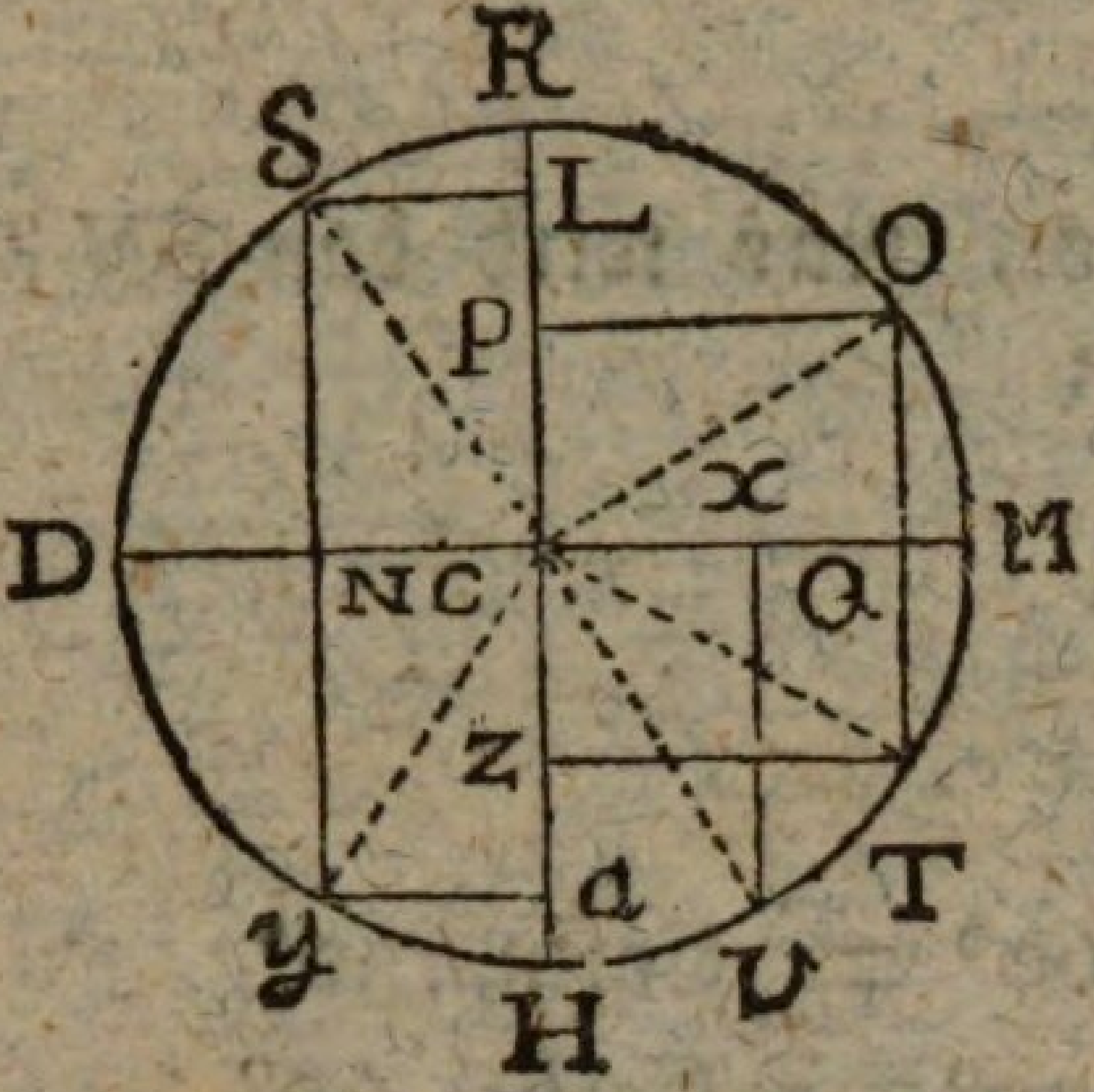
L. Und des Bogens DST = 210° Sinus und Cosinus?

S. Sinus DST = TQ
Cosinus DST = CQ = TZ.

L. Und umgekehrt?

S. TZ = Sinus TH
TQ = Cosin. TH.

L. Auch TZ = Sinus ROT
TQ = Cosin. ROT.



Oder TZ = Sinus RST
CZ = TQ = Cosin. RST.
L. Und des Bogens DSY = 300° Sinus und Cosinus?
S. Sin. DSY = YN
Cosin. DSY = CN = Ya.
Umgekehrt Ya = Sin. YH
YN = Cos. YH
Oder Ya = Sin. YHR
YN = Ca = Cos. YHR
Oder Ya = Sinus RSY
YN = Ca = Cos. RSY.

§ 18.

L. Wir müssen uns nun mit den Eigenschaften der Cosinusse bekant machen. Der Sinus steht auf dem Durchmesser (§ 1). und kan von einem End-Punkte desselben bis zum andern sich fort bewegen (§ 8): der Cosinus aber ist das zwischen dem Sinus, und dem MittelPunkt enthaltene Stükk des Durchmessers (§ 7). Hieraus ergeben sich die Grenzen dieses letzten. Welches ist der gröste Cosinus?

S. Der des Bogens Null, welcher dem Halbmesser gleich ist.

L. Und welches ist der kleinste?

S. Der Cosinus von 90°, welcher Null ist.

L. Also der gröste Cosinus ist der des Bogens Null, und ist dem Halbmesser gleich; und der kleinste ist der von 90 Grad, und ist Null. Nimt der Sinus ab, so nimt der Cosinus zu; und umgekehrt. Man kan sich die Ab- und Zunahme ver-

sinnlichen, wenn man sich CS auf CD liegend vorstellt, und nun CS in Gedanken um den MittelPunkt C dreht, da denn, so wie S sich von D entfernt, und der Bogen DS größer wird, sein Sinus zu-, sein Cosinus aber abnimt. Dreht man zurükk, so ist es umgekehrt. Wenn man aber dieses Drehen des Halbmessers CS fortsezt, bis in den zweiten Quadranten hinein, so daß DSO größer als ein ViertelKreis wird, was wird dan aus dem Cosinus?

S. Dan kömt er in entgegen gesezter Richtung wieder zum Vorschein.

Cosinus DSO = CQ = OP.

L. Das ist richtig. Nach Verschwindung folgt Uebergang in das Entgegengesezte (A. § 123). Sind die Cosinusse des ersten Quadranten bejaht, so sind die des zweiten verneint; und sind die des ersten verneint, so sind die des zweiten bejaht. — Aber wie groß kan der verneinte Cosinus werden? Wie lange wächst er?

S. Der Cosinus wächst vom 90sten bis zum 180sten Grade, da er zum zweiten Mal dem Halbmesser gleich wird.

L. Recht! Aber wie ist es im dritten Quadranten?

S. Da nimt der Cosinus wieder er ab, bis zum zweiten Mal Null wird.

L. Und im vierten Quadranten?

S. Nimt der Cosinus wieder zu von Null bis zum Halbmesser.

L. Aber welche Cosinusse stehn einander entgegen?

S. Die Cosinusse des zweiten und dritten Quadranten stehn denen des ersten und vierten entgegen.

§. 19.

L. Es sei der Halbmesser = r

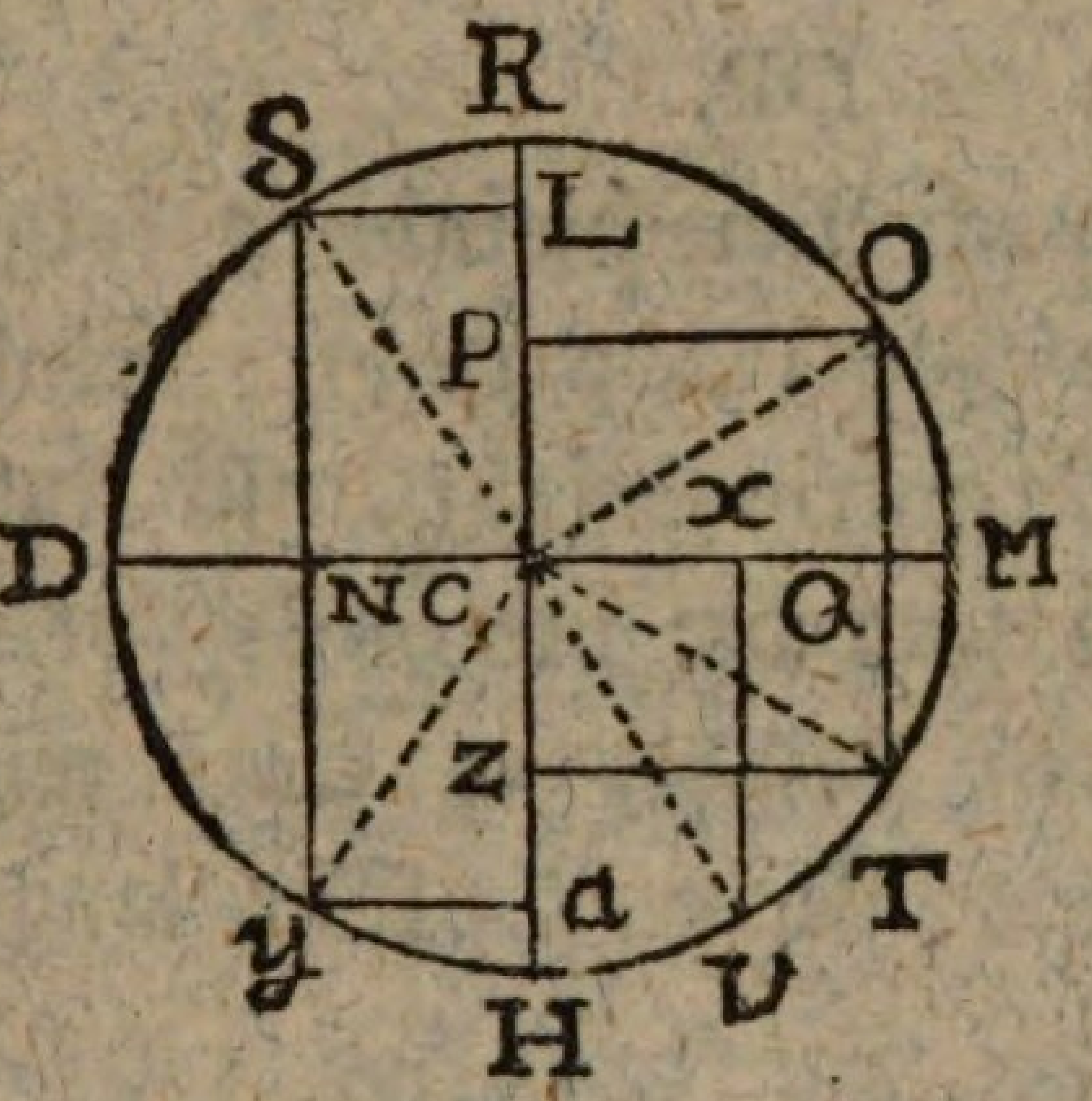
Bogen DS = x

so ist SN = Sinus DS = Sinus x

Welches ist nun eben dieses Bogens x Cosinus?

S. Cosin. x = SL = CN (§ 15. 16).

L. $CN^2 + SN^2 = CS^2$ (G. § 160).



Oder, wenn man den Linien trigonometrische Namen gibt: $(\text{Cos. } x)^2 + (\text{Sin. } x)^2 = rr$ Das heißt = = ?

S. Das Quadrat des Sinus und des Cosinus sind zusammen dem Quadrate des Halbmessers gleich.

L. Man kan also, wenn der Sinus bekant ist, den Cosinus finden. Wie geschieht das?

S. $(\text{Cosin. } x)^2 + (\text{Sin. } x)^2 = rr$

$$(\text{Cosin. } x)^2 = rr - (\text{Sin. } x)^2$$

$$\text{Cosinus } x = \sqrt{[rr - (\text{Sin. } x)^2]}$$

Das Quadrat des Sinus abgezogen von dem Quadrate des Halbmessers, gibt das Quadrat des Cosinus, aus welchem dieser durch Ausziehung der Wurzel gefunden wird.

L. Um eine Anwendung davon zu machen, sei DS = 60°: wie groß ist dessen Ergänzung SR?

S. Wenn DS = x = 60°;

so ist SR = 90° — 60° (§ 16) = 30°.

L. Und Cosinus $= CN$, wie groß ist der?

S. $CN = SL$ (§ 16) $=$ Sin. 30° (§ 1) $= \frac{r}{2}$ (§ 5).

L. Welches ist nun der Cosinus von 30 Grad?

S. Cosinus $30^\circ =$ Sinus 60° (§ 17) $= SN$.

L. Nun sei umgekehrt, Bogen $SR = x = 30^\circ$. Was ist dan SN?

S. Wenn $SR = x = 30^\circ$

$$\text{so ist } SN \text{ Cos. } x = \sqrt{[rr - (\text{Sin. } x)^2]}$$
$$= \sqrt{[rr - (\text{Sin. } 30^\circ)]}$$
$$= \sqrt{[rr - (\tfrac{r}{2})^2]}$$
$$= \sqrt{(rr - \tfrac{rr}{4})}$$
$$= \sqrt{\tfrac{3}{4}rr} = r\sqrt{\tfrac{3}{4}}.$$
$$= r\sqrt{\tfrac{3}{2}} = r\sqrt{3} : 2.$$

L. Wenn man nun $r = 1$ annimt (§ 7), was ist denn Sinus 30°? oder Cosinus 60°?

S. Ist $r = 1$

so ist Sinus $30^\circ =$ Cos. $60^\circ = \frac{1}{2} = 0{,}5$ (§ 5).

L. Und Sinus 60°?

S. Sinus $60^\circ =$ Cosinus $30^\circ = \sqrt{3} : 2 = \sqrt{0{,}75} = 0{,}8660254037$ ..

* § 20.

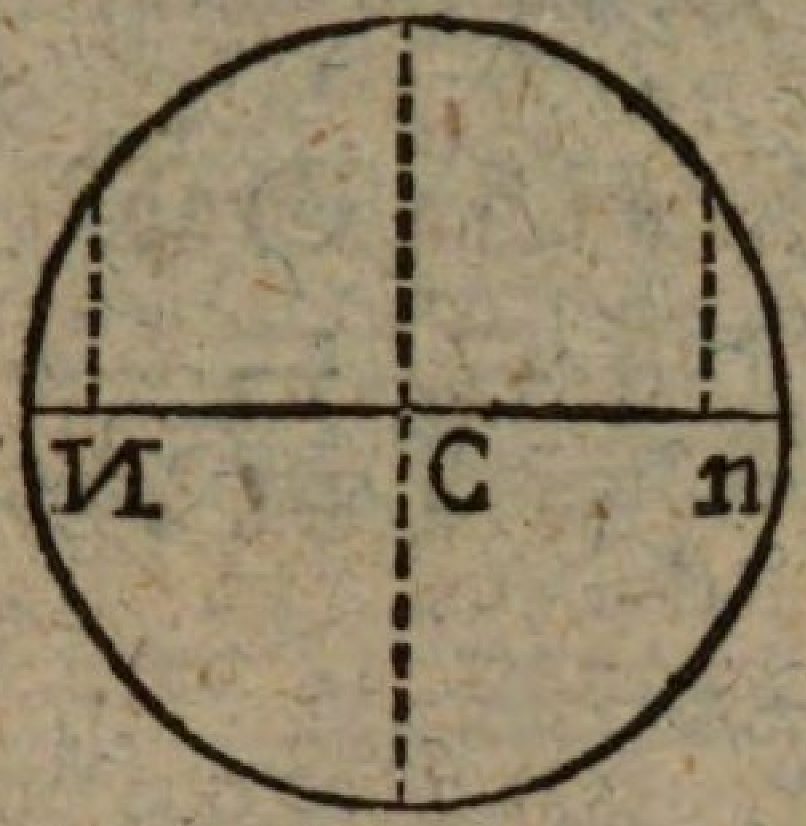
L. Mit den Sinussen von 30 und von 60 Grad sind auch noch ein par andre Sinusse bekant. Welches sind die?

S. Sinus $30^\circ =$ Sinus 150° \
Sinus $60^\circ =$ Sinus 120° } (§ 11).

L. Es gibt noch zwei par ihnen gleiche, aber entgegen gesetzte. Welches sind die?

S. Sin. $(180^\circ + 30^\circ) =$ Sin. 210° \
Sin. $(270^\circ + 60^\circ) =$ Sin. 330° } $= -$ Sin. 30° (§ 12. 13)

Sin. (180° + 60°) = Sin. 240° }
Sin. (270° + 30°) = Sin. 300° } = — Sin. 60°.



L. Man kan also sagen: Wer einen Sinus kennt, der kennt vier Sinusse. Und da die Cosinusse auch Sinusse sind (§ 16); so gilt von ihnen ein Gleiches. — Welche Cosinusse z. B. sind CN, dem Cosinus 30° gleich?

S. CN = — Cn.

CN = Cosinus 30° und Cosinus 330° (§ 15)
Cn = Cosinus 150° und Cosinus 210° (§ 16).

L. Wohl zu merken, jedoch, daß CN und Cn einander entgegen stehn, so daß, wenn CN bejaht, Cn verneint ist; und umgekehrt. Z. B.:

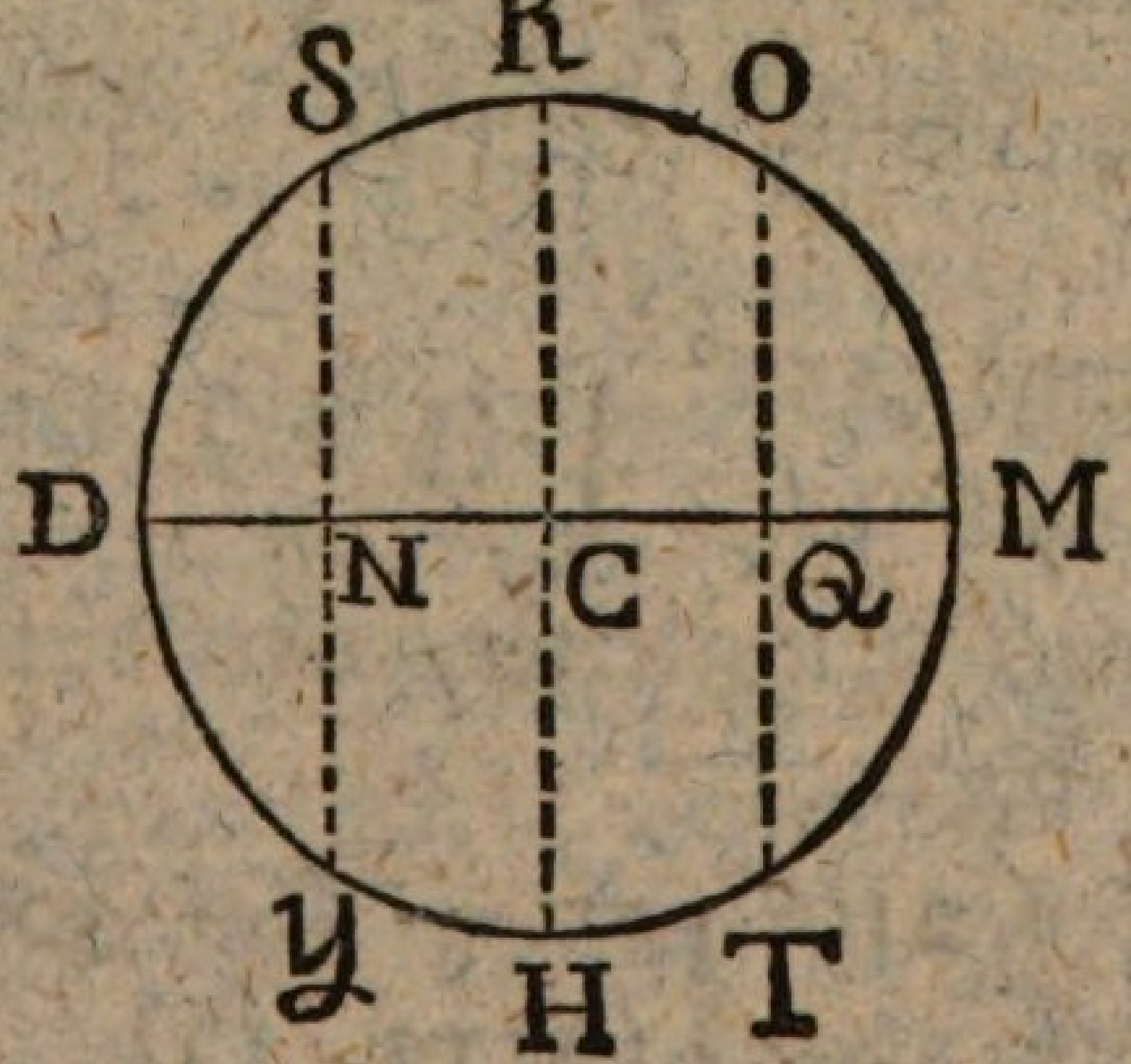
ist Cosinus 30° = + CN
so ist Cosin. 150° = — Cn = — CN = — Cos. 30°

Und umgekehrt:

ist Cosinus 30° = — CN
so ist Cosin. 150° = + Cn = + CN = + Cos. 30°

§. 21.

Dritte Erklärung.



L. Das Stükk des Durchmessers von seinem Anfange bis zum Sinus eines Bogens heißt der Quer-Sinus (sinus versus) dieses Bogens. — Welches ist nun des Bogens DS Quer-Sinus?

S. QuerSinus von DS ist DN.

L. Und des Bogens DSO?

S. QuerSinus DSO = DQ.

L. Und des Bogens MO?

S. QuerSinus MO = MQ.

L. Und des Bogens DST?

S. QuerSin. DST = DQ = QuerSin. DSO.

L. Und des Bogens DSY?

S. QuerSin. DSY = DN = QuerSin. DS = QuerSin. DY.

L. Der dritte Quadrant hat also mit dem zweiten, und der vierte mit dem ersten einerlei QuerSinusse — Welches aber ist des HalbKreises DSM oder DYM QuerSinus?

S. Des HalbKreises QuerSinus ist der Durchmesser.

§ 22.

L. $\frac{DN + NC = r}{DN \qquad = r - NC}$ (G. § 37).

Das ist: QuerSin. x = r — Cosin. x (§ 19).

Was heißt das?

S. Der QuerSinus eines Bogens ist der Ueberschuß des Halbmessers über den Cosinus.

L. Um also den QuerSinus zu finden, muß man den Cosinus von dem Halbmesser abziehen. Findet das aber nicht Stat, wenn der QuerSinus DQ, größer ist als der Halbmesser DC?

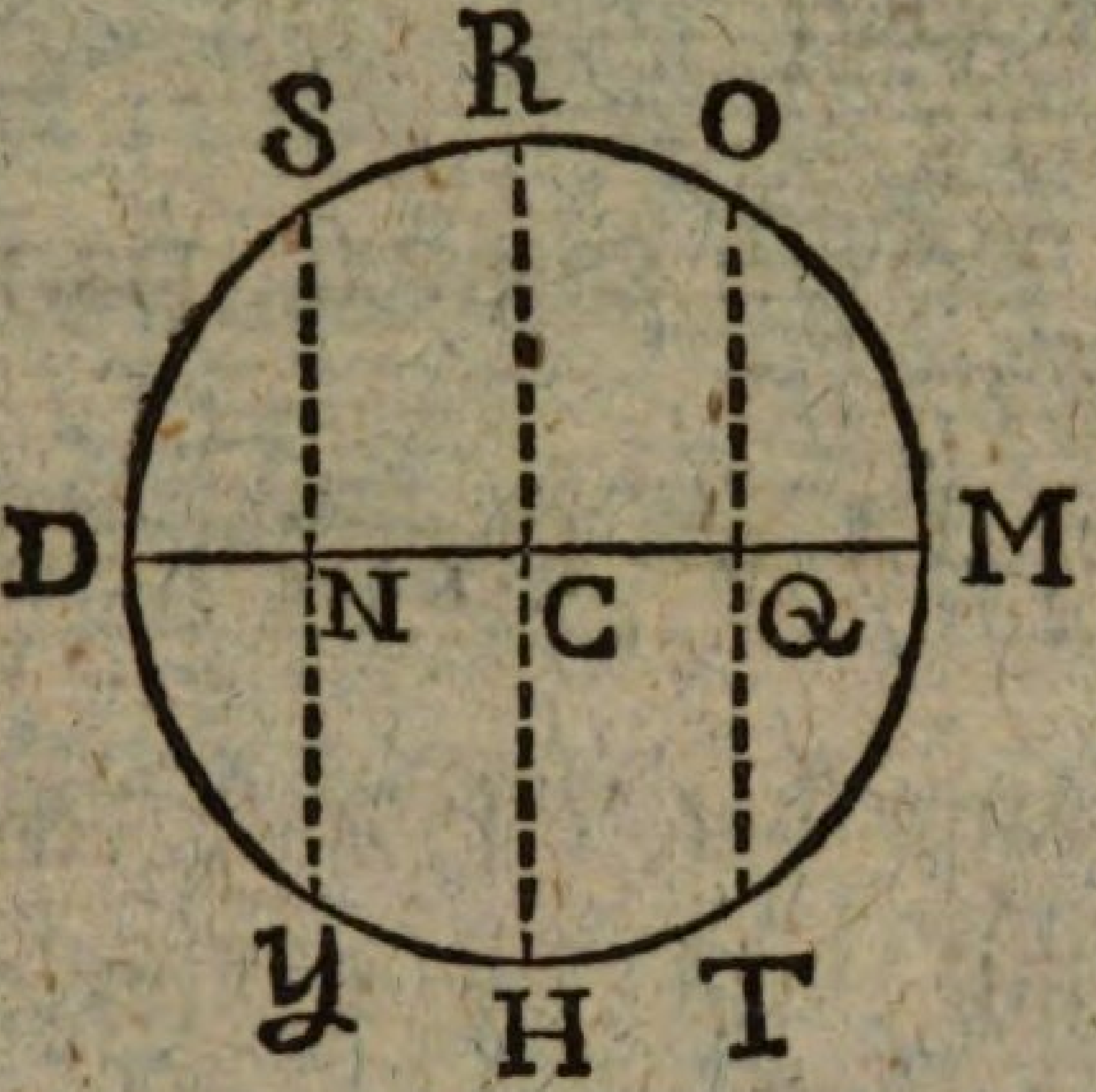
S. Dan wol nicht.

L. Wir wollen sehen! — Welches ist der Cosinus des Bogeus DSO?

S. Cosinus DSO = — CQ (§ 18).

L. Nun von r = DC
abgezogen — CQ : : ?

S. Bleibt DC + CQ (A. § 131).



L. Die Regel also: Der QuerSinus eines Bogens ist der Ueberschuß des Halbmessers über dessen Cosinus, ist allgemein. Und da wir aus dem Sinus den Cosinus zu berechnen wissen (§ 19) so können wir auch den QuerSinus finden, wan der Sinus bekant ist.

S. QuerSinus x = r — $\sqrt{}$ [rr — (Sin. x)²].

L. Recht! — Eigentlich muß die allgemeine Formel geschrieben werden:

QuerSinus x = r — ± $\sqrt{}$ [rr — (Sin. x)²].

Ob der abzuziehende Cosinus = $\sqrt{}$ [rr — (Sin. x)²] bejaht oder verneint sei, muß in jedem einzelnen Fall nach § 18 entschieden werden.

§. 23.

L. Es sei wie ehemals (§ 19):

DS = x = 60°,

DC = r = 1;

welches ist dan DN = QuerSinnus x?

S. QuerSin. x = r — $\sqrt{}$ [rr — (Sin. x)²] (§ 22)

QuerSin. 60° = 1 — $\sqrt{}$ [1 — (Sin. 60°)²]

= 1 — $\sqrt{}$ (1 — 0,8660254037²) (§ 19)

= 1 — $\sqrt{}$ (1 — 0,74995643 : :)

$= 1 - \sqrt{0,25004356} \dots$

$= 1 - \sqrt{0,5000} \dots = 0,5000 \dots$

L. Es läßt sich noch auf andre Art berechnen.

QuerSin. $x = r -$ Cosin. x

QuerSin. $60^{\circ} = 1 -$ Cosin. 60°.

Welches ist der Cosinus von 60 Grad?

S. Cosin. $60^{\circ} =$ Sin. 30° (§ 17).

L. Und da der Sinus von 30 Grad für den Halbmesser 1 schon berechnet ist (§ 19); so läßt sich die Berechnung des QuerSinus sehr abkürzen.

S. QuerSin. $60^{\circ} = 1 -$ Cosin. 60°

$= 1 -$ Sin. 30°

$= 1 - 0,5$

$= 0,5$.

L. Nun wollen wir auch den QuerSinus von 30 Grad, nach dieser letzten Art berechnen.

S. QuerSin. $30^{\circ} = 1 -$ Cosin. 30°

$= 1 -$ Sin. 60° (§ 17)

$= 1 - 0,8660254037$ (§. 19)

$= 0,1339745962$.

§ 24.

L. Die Sinusse und Cosinusse nehmen ab und zu, sind bejaht und verneint (§ 9. 17). Ist das auch mit den QuerSinussen der Fall?

S. Ja. Die QuerSinusse wachsen im ersten Quadranten von Null bis zum Halbmesser, und im zweiten, vom Halbmesser bis zum Durchmesser. Hierauf nehmen sie wieder ab, im dritten Quadranten vom Durchmesser bis zum Halbmesser, und im vierten vom Halbmesser bis Null.

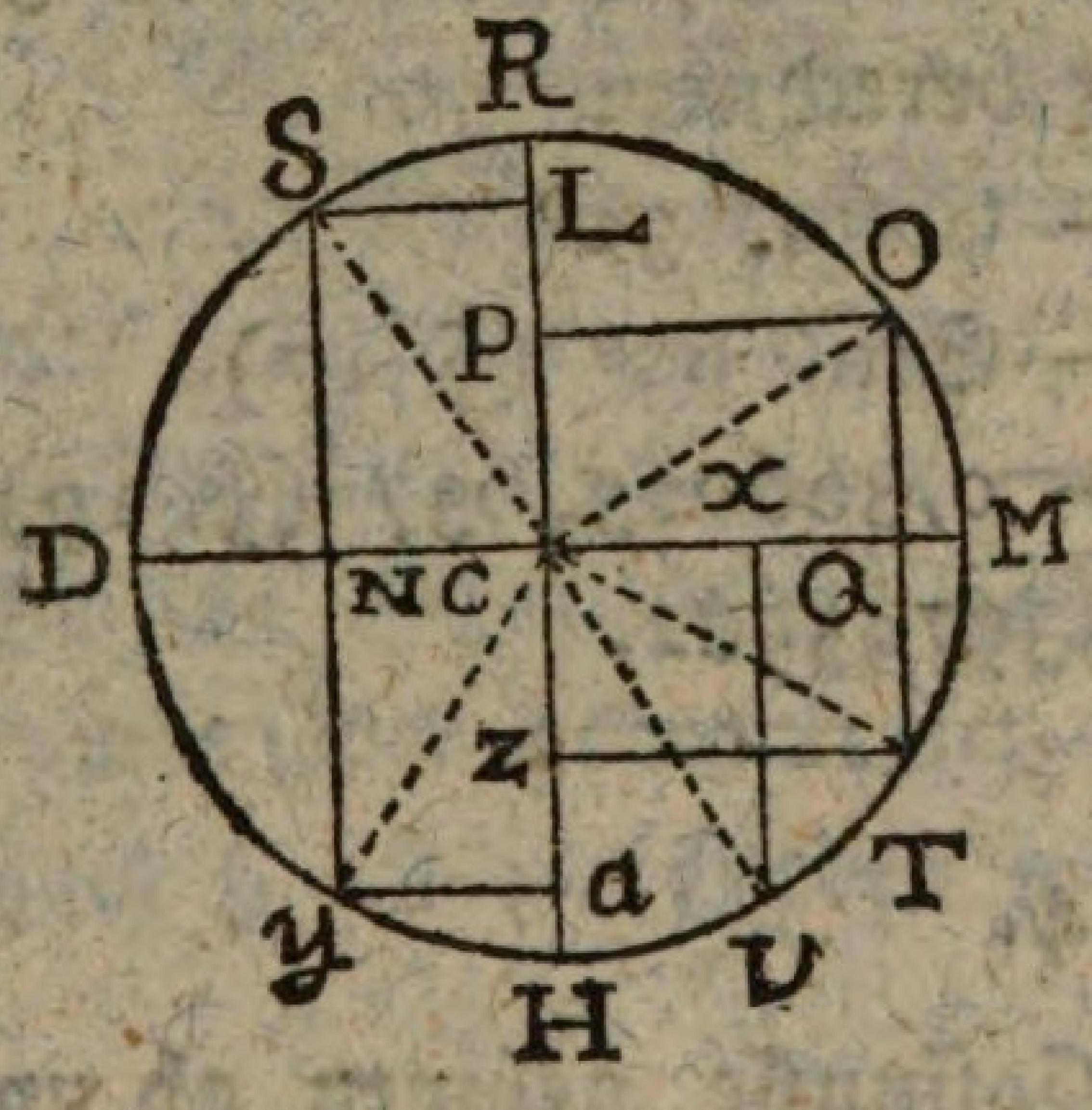
L. Bleiben aber stets bejaht.

S. Die Cosinusse arteten doch um, als sie über den Mittelpunkt kamen (§ 18).

L. Das ist richtig: denn sie waren vorher verschwunden, und kamen, wie der neue Mond, in entgegen stehender Richtung wieder zum Vorschein. Nicht so die QuerSinusse. Diese wachsen fort, bis sie das andre Ende des Durchmessers erreichen. Nur durch Nullen und durch das Unendliche geht man ins Entgegenstehende über.

§. 25.

Vierte Erklärung.



L. Der Cosinus ist der Sinus der Ergänzung (§ 16), und der QuerCosinus (cosinus versus) ist der Cosinus der Ergänzung. Welches ist hiernach des Bogens DS QuerCosinus?

S. Des Bogens DS Ergänzung ist SR. QuerSinus SR ist RL = QuerCosinus DS.

L. Es ist richtig. Diese Erklärung aber ist nicht hinreichend uns den QuerSinus eines Bogens DSO, welcher größer ist als der ViertelUmfang, kennen zu lehren: wir müssen uns daher nach einer vollständigern umsehn. Wir wollen den Durchmesser DM, von welchem der Bogen anfängt, den ersten, und den ihm rechtwinklicht schneidenden RH den zweiten nennen. Der Punkt R dessel-

ben, welcher den von D ausgehenden Bogen DSO zuerst trift, soll der Anfang, der entgegenstehende H, das Ende heissen. Eben so soll ein auf dem Durchmesser liegender Cosinus CN, CQ der erste, und der ihm gleiche und gleichlaufende LS, PO, der zweite Cosinus heissen. Nun lässt sich die Erklärung des QuerCosinus so fassen: Der QuerCosinus eines Bogens ist das Stükk des zweiten Durchmessers von dessen Anfange bis zum zweiten Cosinus dieses Bogens. — Welches ist nun der QuerCosinus des Bogens DSO?

S. Zweiter Cosinus DSO = PO
folglich QuerCosinus DSO = RP.

L. Und des Bogens DST?

S. QuerCosinus DST = RZ.

L. Und des Bogens DSY?

S. QuerCosinus DSY = Ra.

L. Und des Bogens DSM?

S. QuerCosinus DSM = RC.

L. Und des Bogens DSH?

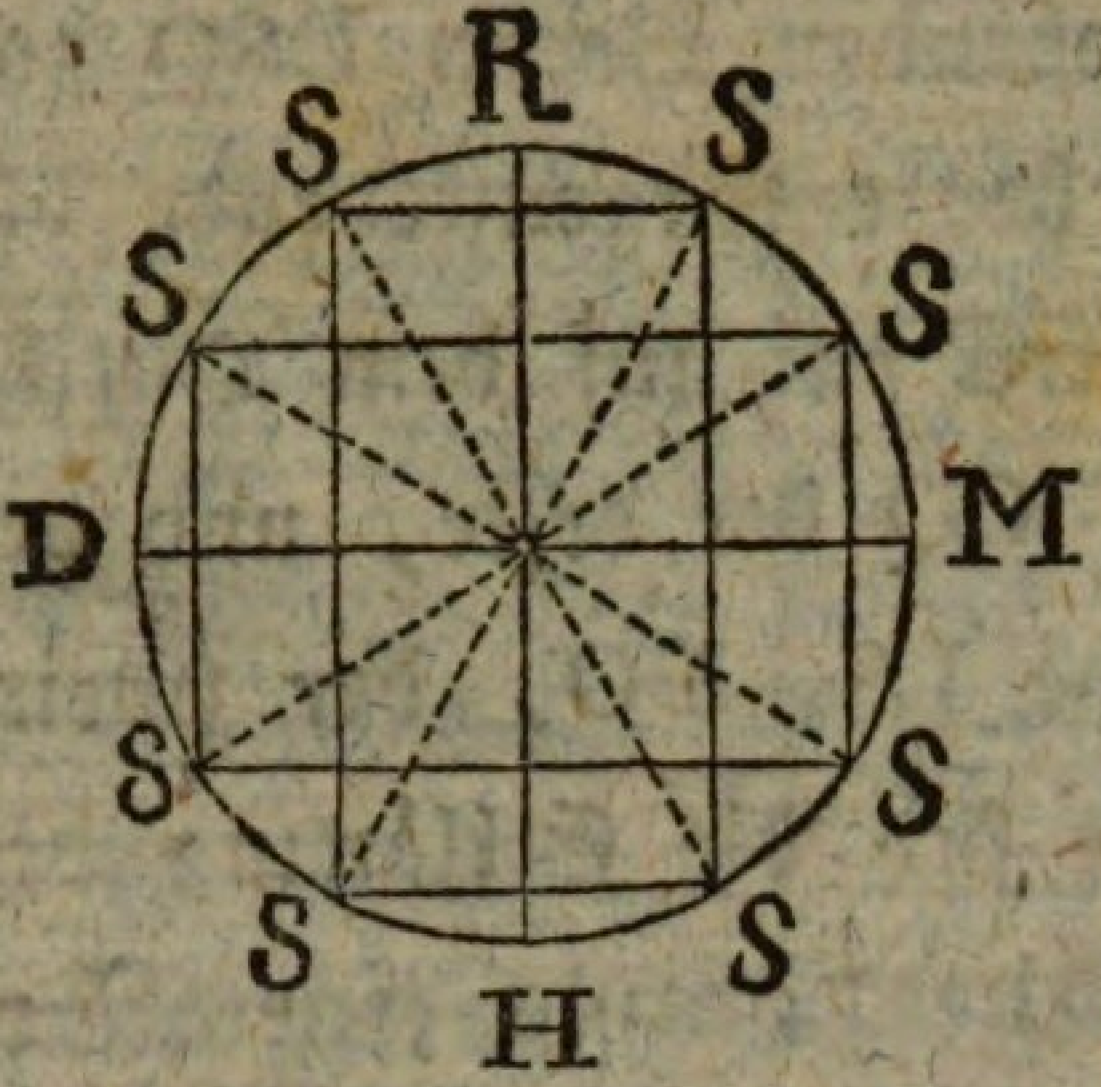
S. QuerCosinus DSH = RH.

L. Und des Bogens DY?

S. Hier wird, nach der Erklärung, H der Anfang des zweiten Durchmessers: folglich
QuerCosinus DY = Ha.

* §. 26.

L. Nun wollen wir das Zu- und Abnehmen der QuerSinusse und der QuerCosinusse untersuchen, nach folgender Zeichnung, wo Dn die QuerSinusse und Rc die ihnen entsprechenden QuerCosinusse bedeuten.



S. Im ersten Quadranten wachsen die QuerSinusse von Null bis zum Halbmesser; die QuerCosinusse aber nehmen ab vom Halbmesser bis Null. Im zweiten Quadranten wachsen die QuerSinusse vom Halbmesser bis zum Durchmesser; die QuerCosinusse nehmen zu von Null bis zum Halbmesser. Im dritten Quadranten nehmen die QuerSinusse ab, vom Durchmesser bis zum Halbmesser; die QuerCosinusse nehmen zu vom Halbmesser bis zum Durchmesser. Im vierten Quadranten nehmen die QuerSinusse ab vom Halbmesser bis Null; die QuerCosinusse nehmen ab vom Durchmesser bis zum Halbmesser. Und nun geht es wie von vorne, im fünften Quadranten wie im ersten; im sechsten wie im zweiten u. s. w.

L. Die QuerCosinusse also nehmen ab und zu wie die QuerSinusse, nur auf entgegen gesetzte Art, und bleiben, wie diese, stets bejahend.

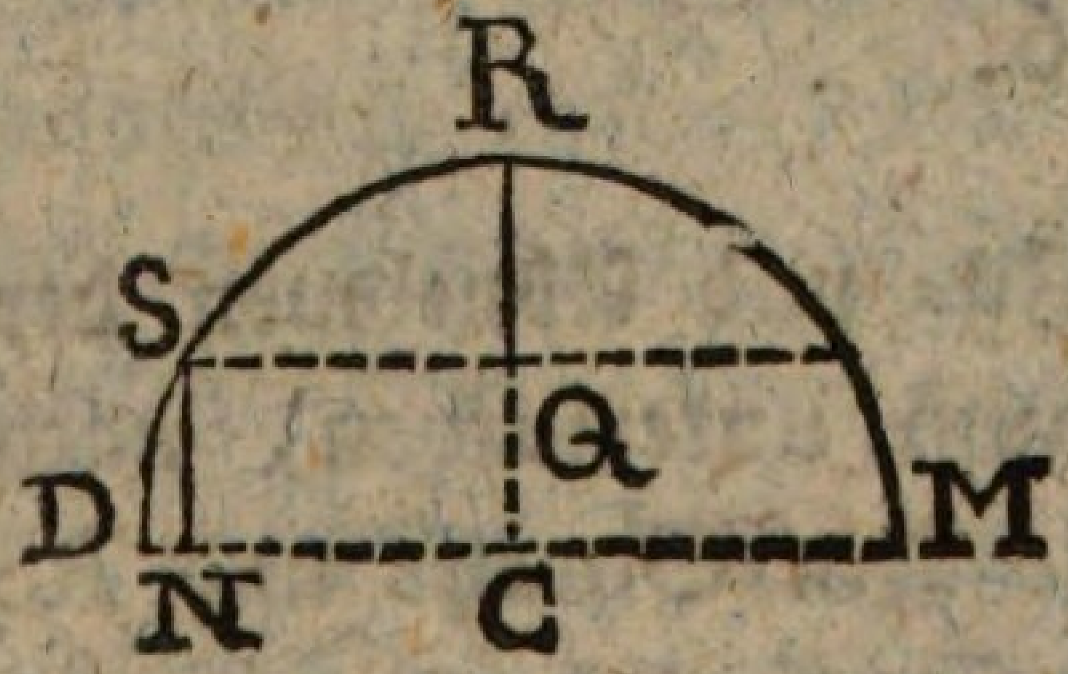
§ 27.

L. Welches ist der QuerCosinus des Bogens DS?

S. QuerCosin. DS = RQ (§ 25.)

L. Und wie groß ist RQ?

S. RQ = RC — QC.



L. Aber QC = SN (§ 16) = Sin x. Die vorige Formel trigonometrisch ausgedrückt wüde demnach lauten?

S. QuerCos. x = r — Sin. x.

Mit Worten: Der QuerCosinus eines Bogens, ist der Ueberschuß des Halbmessers über den Sinus.

L. Man kan also den QuerCosinus finden, wan der Sinus bekant ist. — Es sei Bogen x = 30°; wie groß ist dan sein Sinus?

S. Sinus 30° = $\frac{r}{2}$ (§ 5).

L. Und der QuerCosinus?

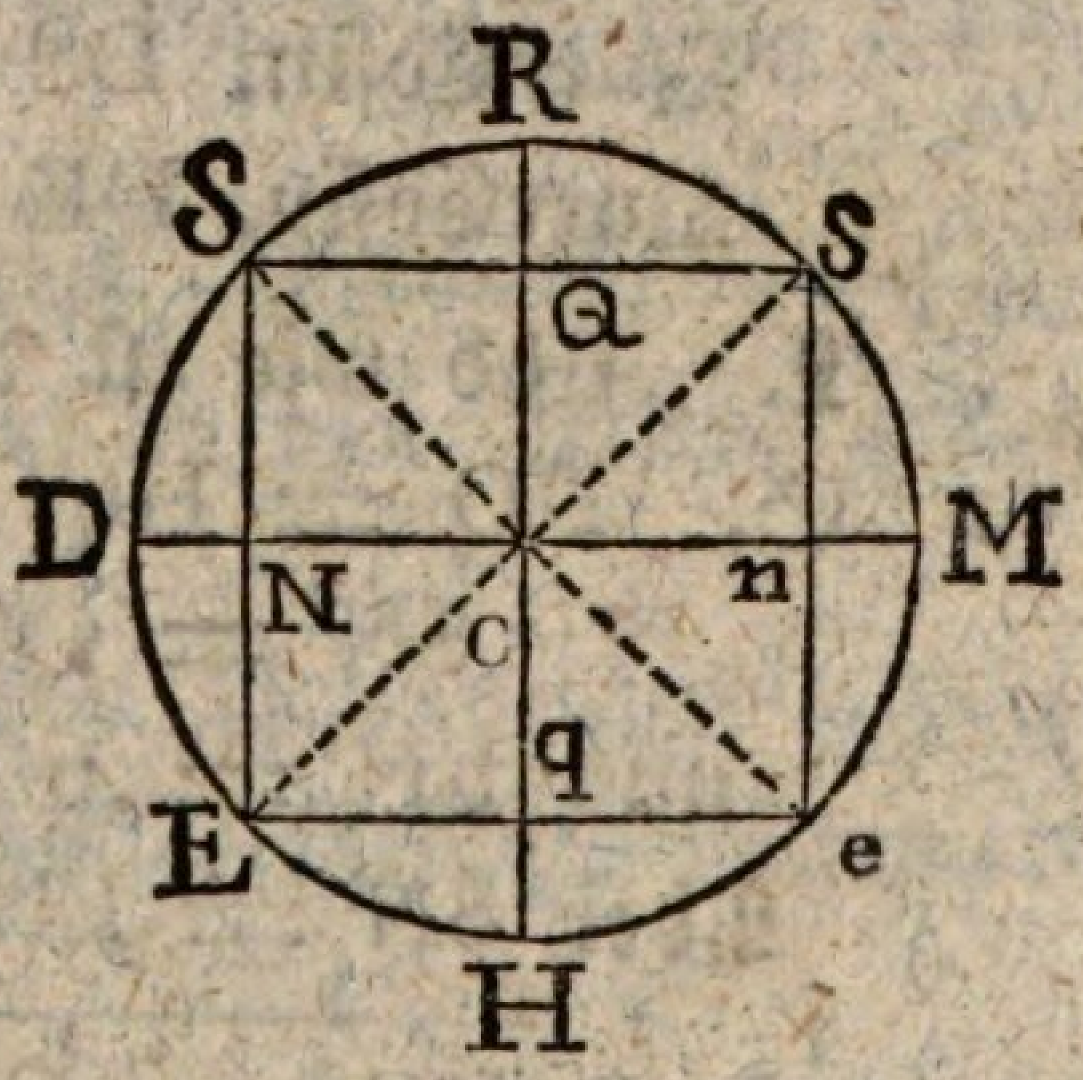
S. QuerCosin. x = r — Sin. x

$= r - \frac{r}{2}$

oder für r = 1:

= 1 — 0,5 = 0,5 (§ 5).

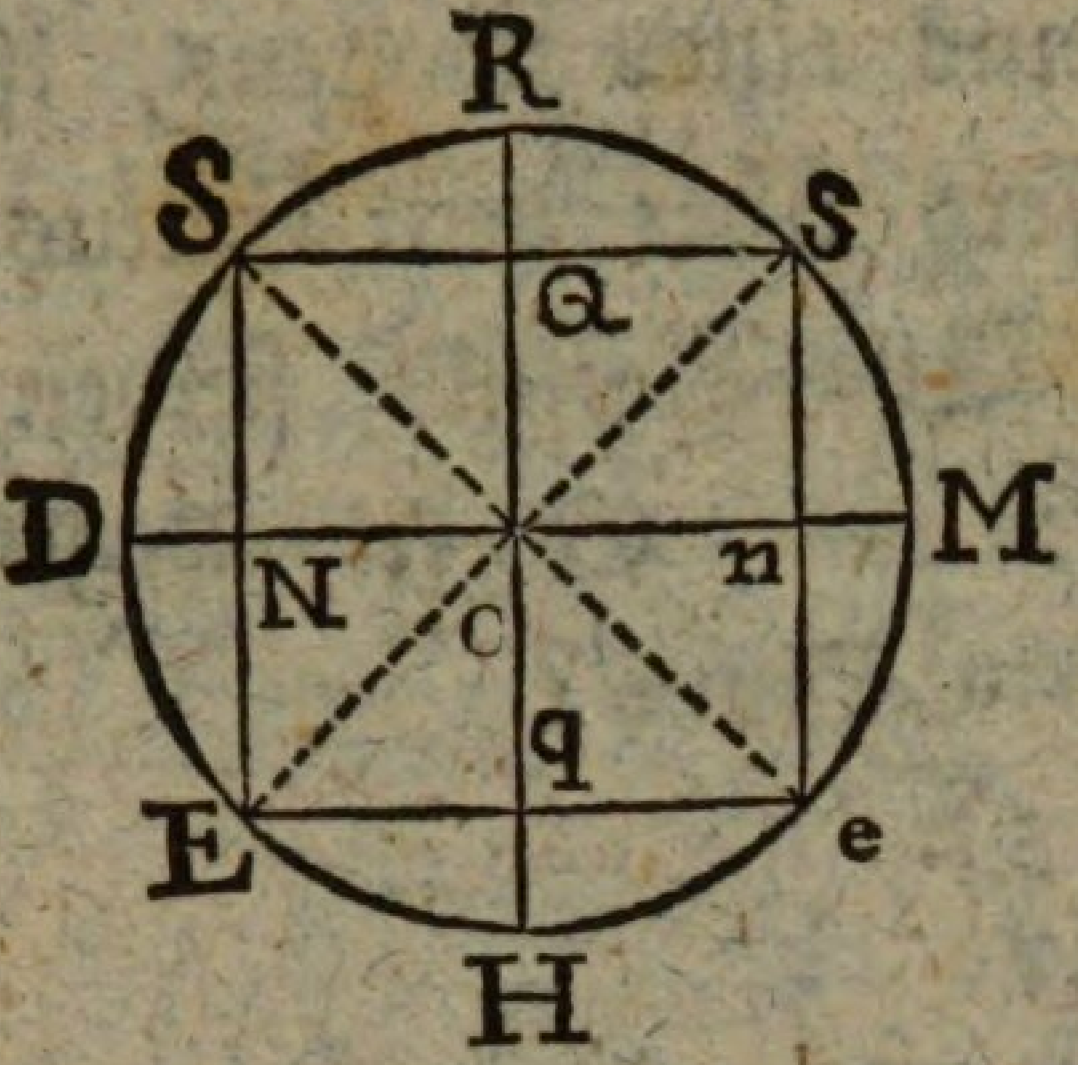
§ 28.



L. Auf dem Umfange eines Kreises kan man von einem Punkte D aus, dahin zurükk, nach entgegen gesetzten Richtungen, über SRMHE, und über EHMRS gehen: beide Wege aber stehen einander entgegen; und daher sind die Bögen DS und DE. DSs und DEe, DSe und DEs entgegen gesetzte Grössen. Nimt man z. B. DS bejaht an, so ist DE verneint; und umgekehrt (A. § 120). — Nun wollen wir die Beschaffenheit der Sinusse, Cosinusse, QuerSinusse und QuerCosinusse entgegen gesetzter gleicher Bögen untersuchen. In den beiden ersten Quadranten DR und DH sei:

Bogen DS = Bogen DE.

Welches sind ihre Sinusse?



S. Sin. DS = SN } (§ 3).
Sin. DE = EN }

L. Und welcher von beiden ist der långste?

S. SN = EN (§ 4).

Da sie aber entgegen gesetzte Richtungen haben, so ist, wenn man SN bejaht annimt, EN verneint. Also eigentlich;

+ EN = — SN

L. Und die Cosinusse beider Bögen?

S. Cosin. DS = NC = Cosin. DE (§ 15).

L. Beide haben also einerlei Cosinusse. — Aber nun die QuerSinusse und QuerCosinusse?

S. QuerSin. DS = DN = QuerSin. DE (§ 21)
QuerCosin. DS = RQ
QuerCosin. DE = Hq.

L. Und wie ist die Långe von RQ und Hq?

S. RQ = Hq: denn
SN = QC } (§ 16),
und EN = qC }
Aber SN = EN (§ 4)
QC = qC (G. § 32)
RQ = Hq (G. § 37).

L. Oder eigentlich, da sie entgegen gesetzte Richtung haben = = ?

S. Hq = — RQ.

L. Im ersten bejahten, und ersten verneinten Quadranten also haben zwei entgegen gesetzte Bögen gleiche, aber entgegen stehende Sinusse, einerlei Cosinus, einerlei QuerSinus, und gleiche, aber einander

entgegen stehende QuerCosinusse. — Nun wollen wir in den beiden folgenden Quadranten die Bögen DSs und DEe vergleichen.

S. Sinus DSs = sn } (§ 1)
Sinus DEe = en

+ sn = − en } (§ 12)
− sn = + en

Cosin. DSs } = Cn (§ 15)
Cosin. DEe

QuerSin. DSs } = Dn
QuerSin. DEe

QuerCosin. DSs = RQ = − Hq
QuerCosin. DEe = Hq = − RQ.

L. Alles wie in den vorigen Quadranten. — Und die Bögen DSe und DEs?

S. Haben Alles wie die vorigen DSs und DEe, nur verwechselt.

L. Und die Bögen DSE und DES?

S. Haben Alles wie die in den beiden ersten Quadranten, aber verwechselt.

L. Die vorhin für einzelne Quadranten gefundene Regel gilt also für alle. Wie wird sie allgemein ausgedrukkt?

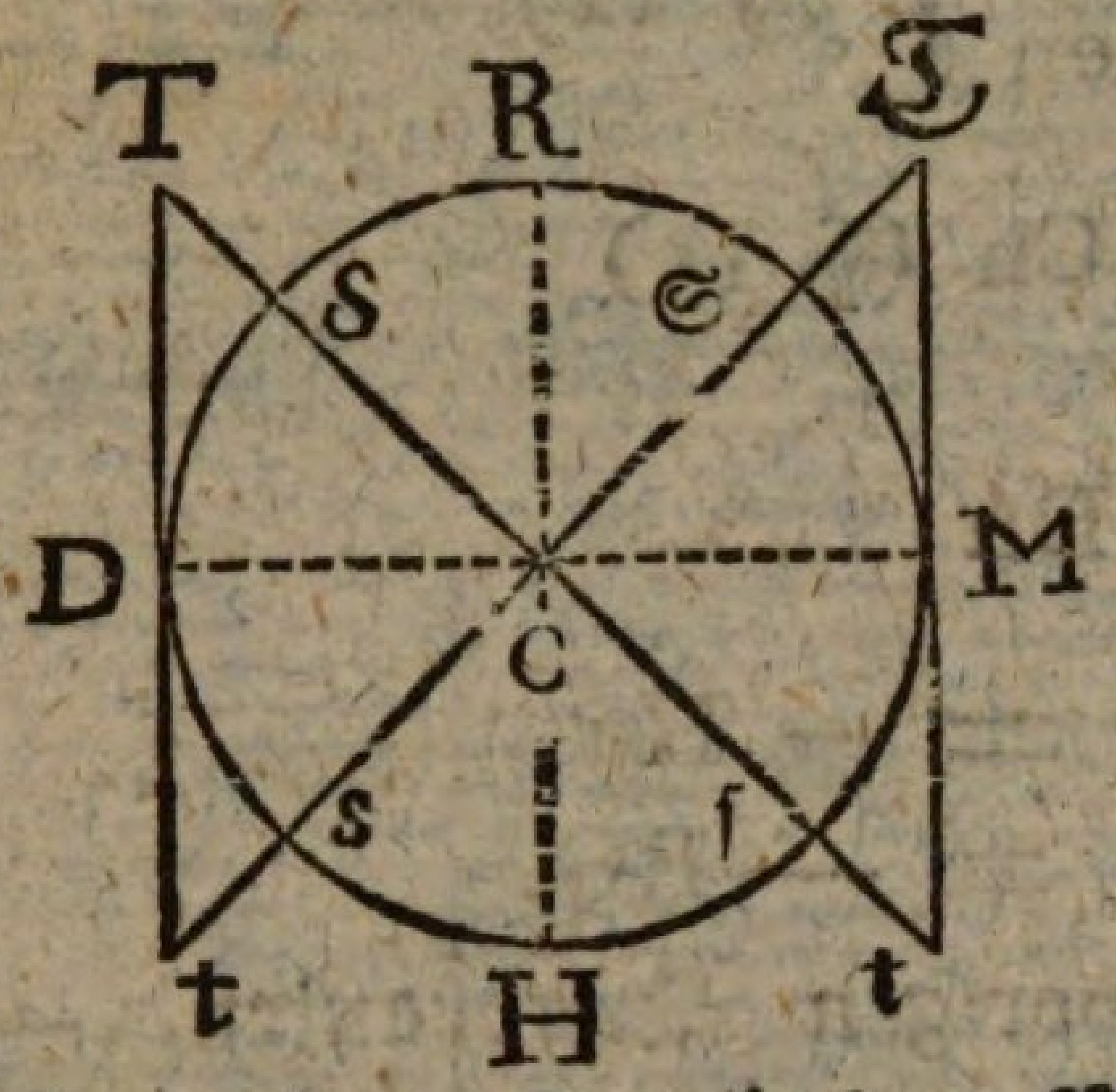
S. Gleiche aber einander entgegen stehende Bögen haben gleiche einander entgegen stehende Sinusse und QuerCosinusse; aber einerlei Cosinus und einerlei QuerSinus.

L. Recht! Und es ist noch besonders zu bemerken, daß die Cosinusse der beiden äussersten Quadranten den Cosinussen der beiden mittelsten entgegen stehn:

$$+ NC = - Cn$$
$$- NC = + Cn.$$

§ 29.

Fünfte Erklärung.



L. Es wird ein beliebiger Kreis gezeichnet, ein Durchmesser DM gezogen, und ein Bogen DS kleiner als der ViertelUmfang, abgestekkt. An einen EndPunkt D, des Bogens DS, wird eine StreifLinie gelegt (G. § 195). Durch den MittelPunkt C, und durch den andern EndPunkt S, des Bogens DS, wird eine Linie gezogen, welche die StreifLinie schneidet in T. So ist DT die Tangente oder StreifLinie, und CST die Secante, oder SchneideLinie des Bogens DS. — Wenn nun S näher an R gerükkt würde, welchen Einfluß würde das auf die Tangente und Secante haben? Würden sie ab= oder zunehmen?

S. Sie würden zunehmen, bis S auf R zu liegen kämen.

L. Und wie lang wären sie dan?

S. Dan wären sie einander gleichlaufend (G. § 106), und könten nicht mehr zusammen stossen (G. § 98), und wären also unendlich lang.

L. Tangente und Secante des ViertelUmfanges sind also unendlich. Wie wird es vollends werden, wenn S über R hinausgeht, bei noch grössern Bögen?

S. Da gehn beide Linien immer weiter aus einander.

L. Um nun für Bögen, welche grösser sind als der halbe Umfang, Streif- und SchneideLinien zu erhalten, wird an dem andern Ende M des Durchmessers DM eine neue Tangente, und durch C und S eine neue Secante gezogen, welche sich schneiden in T. Diese sind für den zweiten Quadranten: wo werden nun die für den dritten herkommen?

S. Die Tangente für den dritten Quadranten muß auch von M ausgehen, aber nach der entgegen stehenden Seite.

L. Recht! Für die Bögen DSſ ist die Tangente Mt, und die Secante Cſt. — Aber für den Bogen DS im vierten Quadranten?

S. Die Tangente des Bogens Ds ist Dt, und die Secante Cst.

§ 30.

L. Daß die Tangenten des ersten und vierten, desgleichen die des zweiten und dritten Quadranten, einander entgegen stehn, fält in die Augen: wie ist es aber mit den Tangenten DT und MT des ersten und zweiten Quadranten?

S. Die haben einerlei Richtung.

L. Stehn aber an entgegen gesetzten Enden des Durchmessers, und sind also einander entgegen gesetzt. Und gleiche Bewandniß hat es mit den Tangenten des dritten und vierten Quadranten. — Welches sind also die einander gleichartige Tangenten?

S. Die einander gegenüber stehende Qua-

dranten (der erste und dritte, der zweite und vierte) haben gleichartige Tangenten.

L. Wie ist es aber mit den Secanten?

S. Die einander gegenüber stehende Quadranten haben einander entgegen gesezte Secanten.

L. Recht. Es fält in die Augen, daß CT und Ct, CT und Ct einander entgegen stehn. Gleichartige Secanten also sind = =

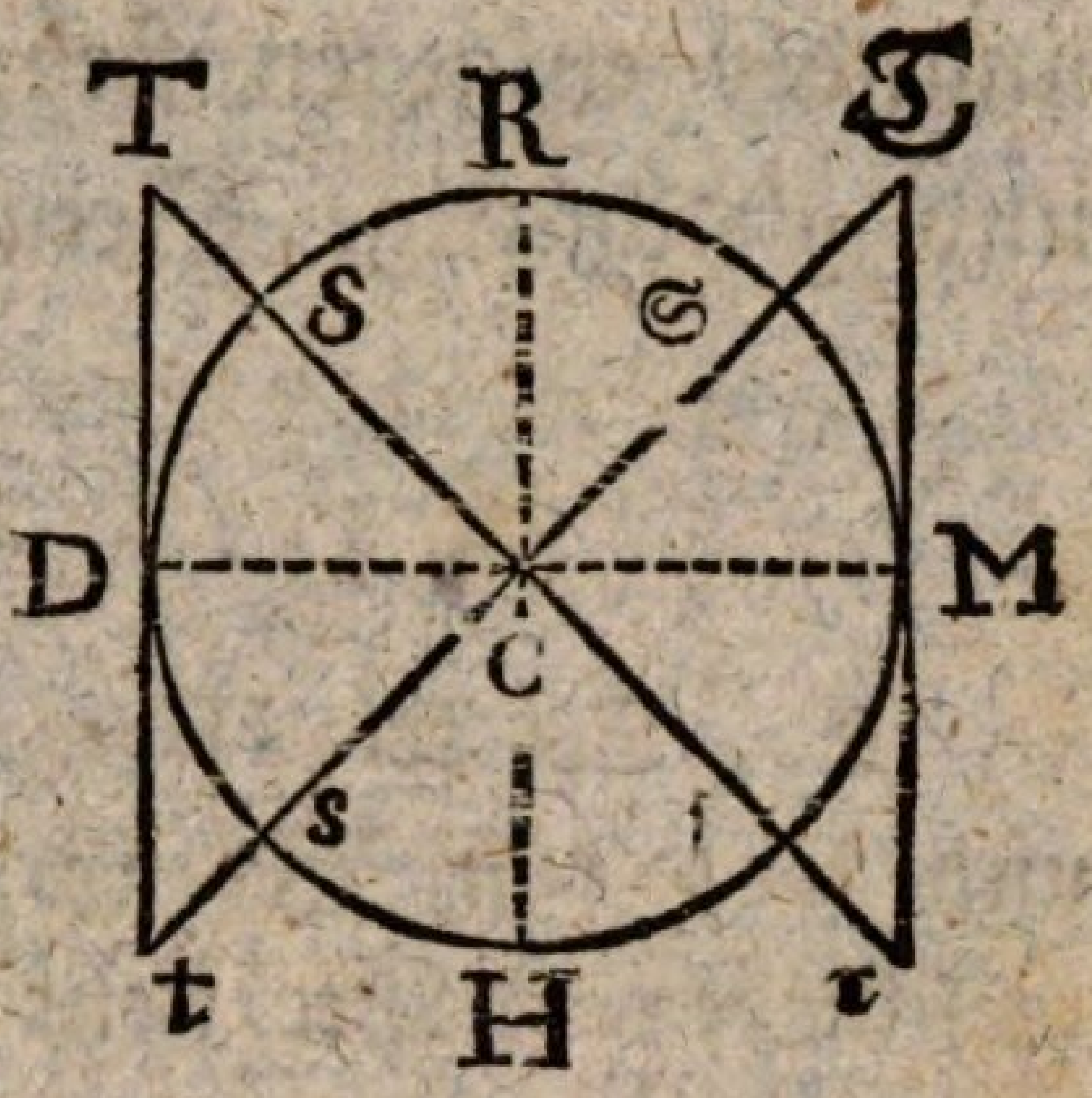
S. Die des ersten und vierten, und die ihnen entgegen stehenden des zweiten und dritten Quadranten. Dieses läſſt sich auch so erklären. Die Halbmesser CD und CM stehn einander entgegen, und die Secanten arten dem nach, gegen welchen sie sich neigen. Ist CD bejaht, so ist es auch CT und Ct; und umgekehrt.

§ 31.

Andere Geometer lassen von M keinen Tangenten ausgehn, sondern behelfen sich, für den dritten Quadranten, mit den Tangenten und Secanten des ersten, und für den zweiten mit denen des vierten. Ich sehe nicht was sie dabei gewinnen, das aber weis ich, daß diese Einrichtung sehr verwirrend für den Anfänger ist. So haben z. B. die Bögen DS und DSſ einerlei Tangente DT, und einerlei Secante CT, welche lezte, wenn sie für den Bogen DS bejaht angenommen wird, für DSſ verneint ist (§ 30). Diese Sache hat schon Geometer in Verlegenheit gesetzt, weshalb Kästner nötig gefunden hat, ihr in seiner geometrischen Abhandlung einen eignen Abschnitt (N. 59) zu widmen.

§ 32.

L. Es sei RS = RS, so sind die Bögen DS und DSS vom ViertelUmfange gleich unterschieden (§ 11). Wie sind ihre Tangenten beschaffen? Gleich oder ungleich? Gleichartig oder ungleichartig?



S. Die Dreiekke DCT und MC𝔗 haben die Winkel bei DM und bei C einander gleich (G. § 49. 32), und die Seite DC = MC gemein, und sind also einander gleichähnlich (G. § 96).

folglich DT = M𝔗
und CT = C𝔗.

Doch stehen die Tangenten sowol als die Secanten einander entgegen (§ 30).

L. Bögen also, welche vom ViertelUmfange zu beiden Seiten gleich unterschieden sind, haben gleiche, aber einander entgegen stehende Tangenten und Secanten.

§ 33.

L. Wenn M𝔖 = Mſ, so sind die Bögen D𝔖𝔖 und DSſ vom halben Umfange gleich unterschieden. Wie sind ihre Tangenten und Secanten beschaffen?

S. Die Dreiekke CM𝔗 und CMt haben bei M und bei C gleiche Winkel (§ 49 und 320), und die Seite CM gemein, und sind daher einander gleich und ähnlich (G. § 96). Folglich

Tang. DS𝔖 = M𝔗 = Mt = Tang. DSſ
Sec. DS𝔖 = C𝔗 = Ct = Sec. DSſ.

Die Tangenten M𝔗 und Mt stehn einander entgegen, die Secanten C𝔗 und Ct aber sind gleichartig (§ 30).

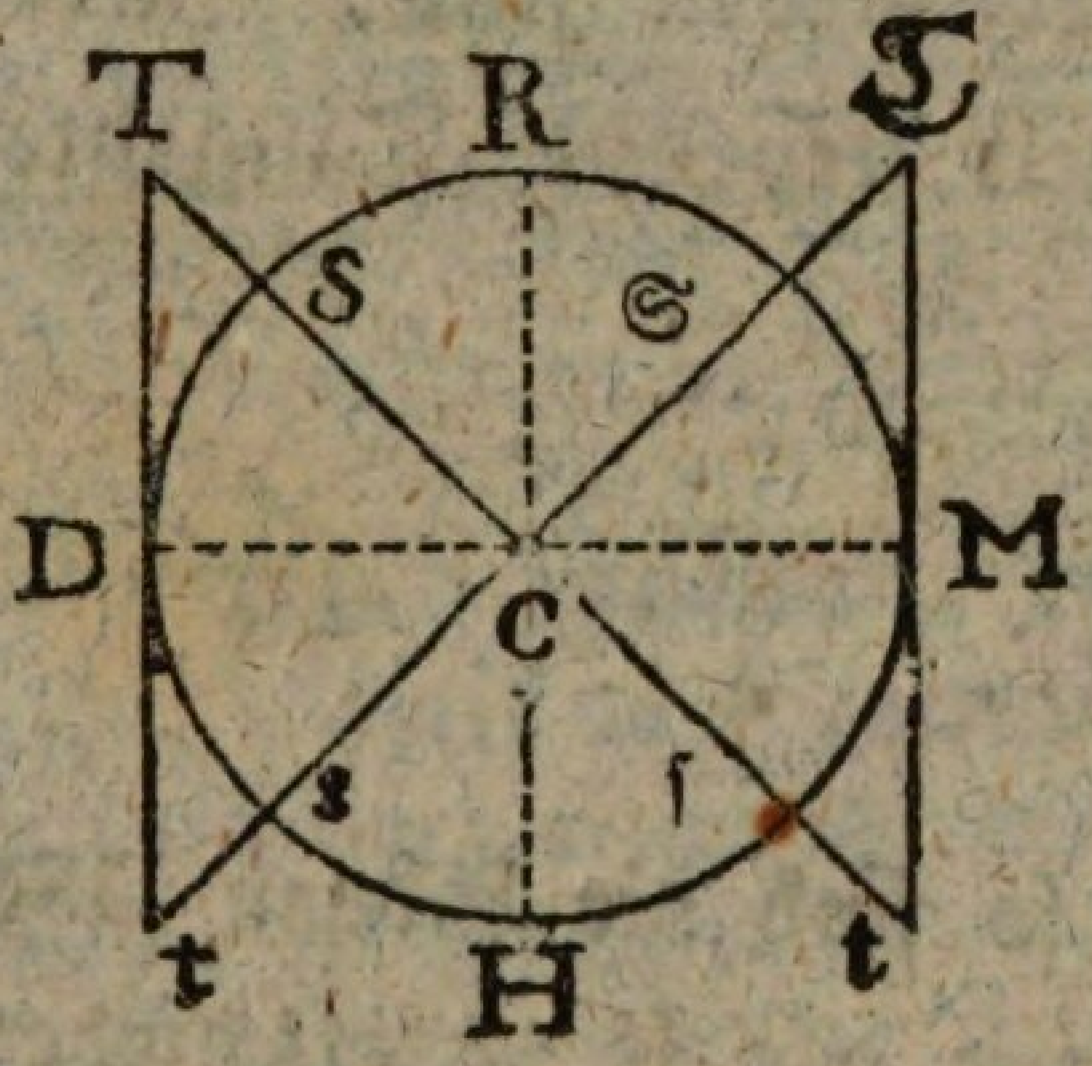
L. Bögen also, welche vom halben Umfange gleich unterschieden sind, haben gleiche, aber

einander entgegen ſtehende Tangenten, und gleiche und gleichartige Secanten.

§ 34.

L. Es ſei Hſ = Hs; ſo ſind die Bögen DSſ und DSs von 270 Grad zu beiden Seiten gleich unterſchieden. Wie ſteht es mit ihren Tangenten und Secanten?

S. $\triangle$ MCt $\cong$ $\triangle$ DCT (G. § 96).
Folglich Tang. DSſ = Mt = Dt = Tang. DSs
Sec. DSs = Ct = Ct = Sec. DSs.



Die Tangenten einander entgegen geſetzt. Die Secanten aber gleichartig.

L. Bögen alſo, welche von drei Viertel des Umfanges zu beiden Seiten gleich viel unterſchieden ſind : :

S. Haben gleiche, aber einander entgegen geſetzte Tangenten und gleiche und gleichartige Secanten.

* § 35.

L. Es ſei DS = Ds; ſo ſind die Bögen DSHs und DsHS vom ganzen Umfange, oder von 360 Grad, gleich viel unterſchieden. Und ihre Tangenten und Secanten : : ?

S. Tang. DSHs = Dt = DT = Tang. DSHDS
Tang. DsHs = Ct = CT = Tang. DSHDS

Die Tangenten stehn einander entgegen. Die Secanten sind gleichartig.

L. Also Bögen, welche vom ganzen Umfange zu beiden Seiten gleich unterschieden sind, haben gleiche Tangenten und Secanten; und zwar die ersten einander entgegen stehend, die lezten aber gleichartig.

§ 36.

L. Angenommen CST werde um C gegen D gedreht, bis S auf D zu liegen kömt: wie groß ist dan der Bogen DS?

S. Dan ist DS = o; das heisst, er ist verschwunden.

L. Und DT?

S. Auch DT = o.

L. Des Bogens Null Tangente also ist Null. — Und wollen wir, in Gedanken, S wieder von D trennen, und gegen R zu bewegen; was wird dan aus DT?

S. So wie DS wächst, so wächst auch DT.

L. Und wenn S auf R kömt = = ?

S. Dan steht CS senkrecht auf DM (G. § 221). Und da auch die StreifLinie senkrecht darauf steht (G. § 193); so sind beide Linien einander gleichlaufend (G. § 106), und können nie zusammen stoßen (G. §. 98).

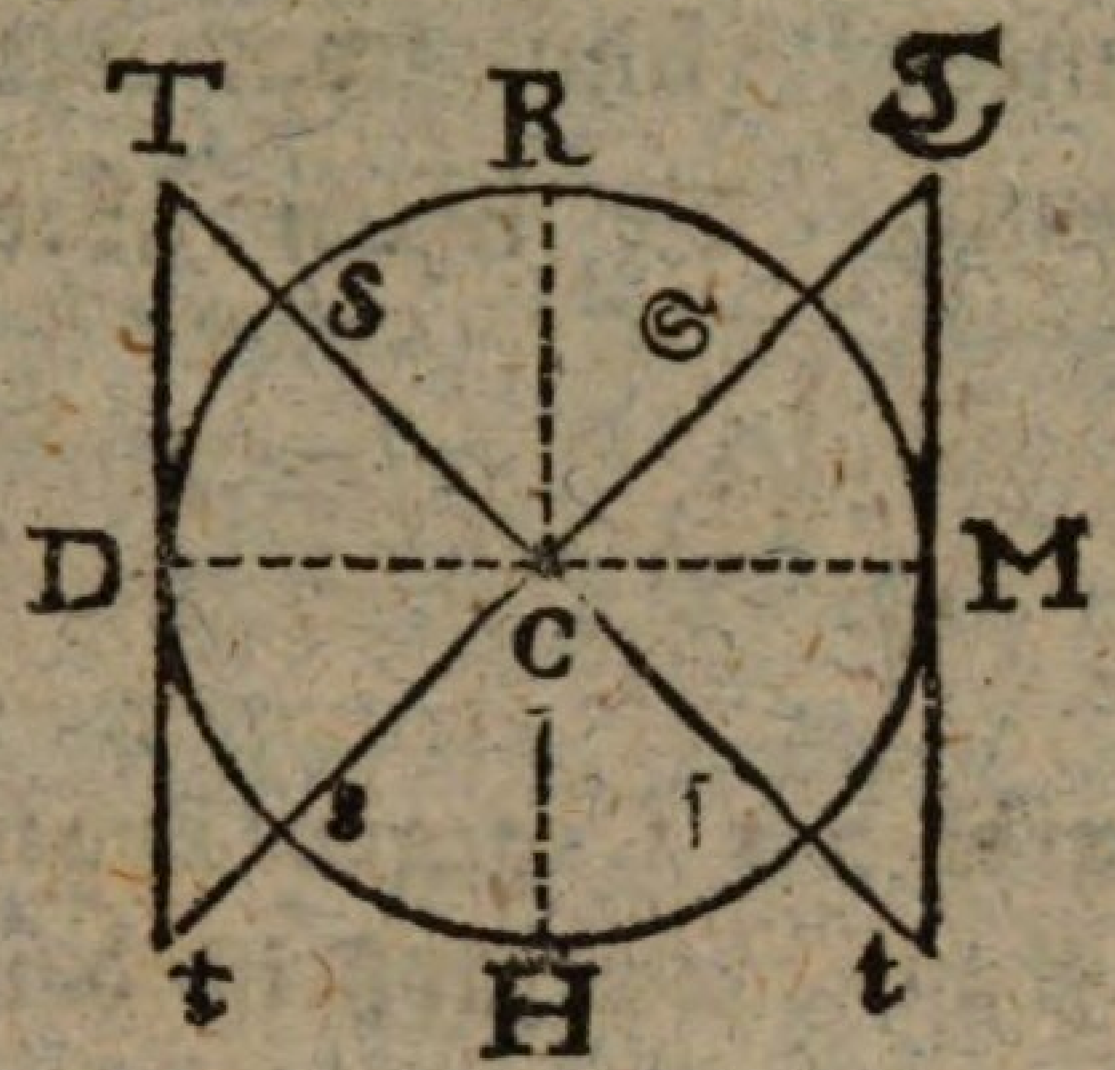
L. Also Tangente Bogens $o = o$,

Tangente Bogens $90^\circ = \infty$.

Was heißt das?

S. Die Tangente des Bogens Null ist Null; und die Tangente von 90 Grad ist unendlich (§ 29).

L. Anders ausgedrukkt würde dieses lauten: Die Tangenten der Bögen von Null bis zum ViertelUmfange wachsen von Null bis unendlich. Wie ist es aber im zweiten Quadranten:



S. Von 90 bis 180 Grad nehmen die Tangenten ab von unendlich bis Null, und stehn denen des ersten Quadranten entgegen.

L. Wie nun im dritten und vierten Quadranten?

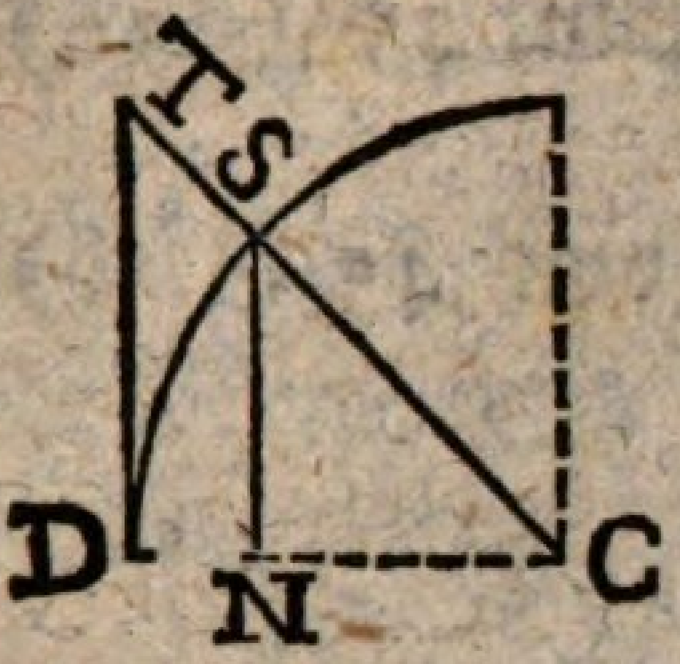
S. Der dritte Quadrant hat mit dem ersten, und der vierte mit dem zweiten, einerlei Tangenten.

L. Wie ist es aber mit den Secanten? Welche ist des Bogens Null Secante?

S. Die Secante des Bogens Null ist der Halbmesser. Hierauf wachsen die Secanten bis 90 Grad, da sie unendlich werden. Von 90 bis 180 Grad nehmen sie wieder ab bis zum Halbmesser. Im dritten Quadranten ist es damit wie im ersten, und im vierten wie im zweiten.

§ 37.

L. Da die Tangenten und Secanten des zweiten Quadranten denen des ersten entgegen stehn, so bestätigt sich hier, was § 24 schon vorläufig bemerkt ist: daß es zwei UeberGänge ins Entgegengesetzte gibt: das unendlich Kleine, oder Null, und das unendlich Grosse.



§ 38.

L. Es wird ein Bogen DS, kleiner als der ViertelUmfang abgestekket, und dessen Sinus SN, Tangente TD, und Secante TSC gezogen; so erhält man zwei Dreiekke CTD und CNS. Was ist von denen bekant?

S. Sie haben den Winkel C gemein. Die Winkel bei D und N sind rechte Winkel (§ 1. 29), und also beide einander gleich (G. § 49): folglich beide Dreiekke einander gleichwinklig (G. § 222).

Folglich CN .. NS = CD .. DT (G. § 257)
oder CN .. CS = CD .. CT (G. § 246).

L. Der Bogen DS soll x heissen; und nun wollen wir die Linien der ersten Proportion ihre trigonometrische Benennungen geben.

S. Cosin. x .. Sin x = r .. Tang. x.

L. Welches ist nun die Tangente x?

S. Tang. x = r (Sin. x) : Cos. x (A. § 294).

L. Aus dem Sinus und Cosinus eines Bogens also wird seine Tangente gefunden. Und da der Cosinus aus dem Sinus gefunden wird (§ 19); so braucht nur der Sinus gegeben zu seyn, um die Tangente zu finden. — Zur Uebung wollen wir die Tangente von 90 Grad, nach dieser Formel berechnen.

S. $x = 90^\circ$

r (Sin. x) : Cos. x = r (Sin. 90°) : Cos. 90°
= r (Sin. 90° : o (§ 18)
= ∞ (A. § 174).

Das heisst: die Tangente des ViertelUmfanges ist unendlich (§ 34).

L. Nun auch die Tangente von 45 Grad!

S. $x = 45^\circ$

r (Sin. x) : Cos. x = r (Sin. 45°) : Cos. 45°

$= r(\text{Sin. } 45^\circ) : \text{Sin. } 45^\circ$ (§ 16)
$= r.$

Die Tangente des AchtelUmfanges (von 45 Grad) ist dem Halbmesser gleich.

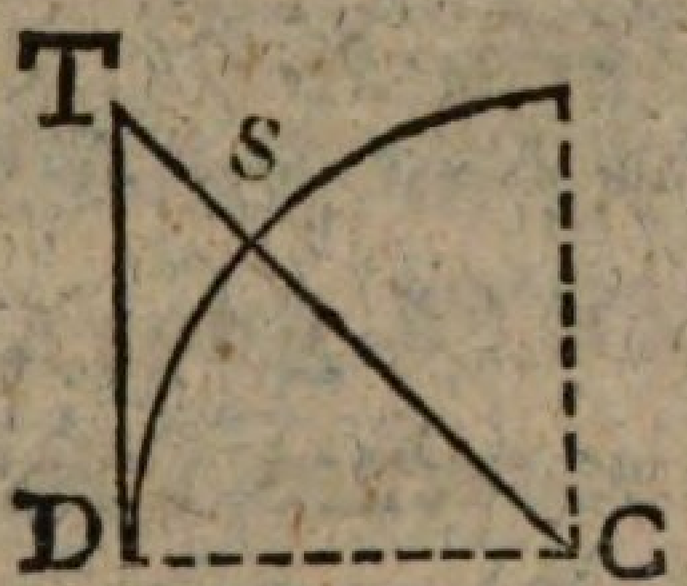
L. Und die Tangente von 60 Grad?

S. Tang. 60° = Sinus 60° : Cosin. 60°
$= 0{,}8660254037 : 0{,}5$ (§ 19)
$= 1{,}732050807.$

L. Sie kan auch so berechnet werden:

Tang. 60° = Sinus 60° : Cosinus 60°
$= (\sqrt{3} : 2) : 0{,}5\frac{1}{2}$ (§ 19)
$= (\sqrt{3} : 2) \times 2 = \sqrt{3}$
$= 1{,}7320508.$

§. 39.



L. Die Tangente von 45 Grad lässt sich auch ohne Sinus und Cosinus berechnen. — Gesetzt der Bogen DS hielte 45 Grad, wie groß ist dan der Winkel DCS?

S. Ist DS = 45°, so ist auch $\angle$ DCS = 45° (G. § 220).

L. Und der Winkel T?

S. Da D ein rechter Winkel ist, so sind die beiden übrigen zusammen auch einem rechten Winkel gleich (G. § 118). Ist nun DCS die Hälfte eines rechten, oder 45°, so ist es auch T.

L. Und wie lang ist TD?

S. TD = CD (G. § 60) = r.

L. Also TD = Tang. 45° = CDr. = r

S. Das heisst: Die Tangente von 45 Grad ist dem Halbmesser gleich (§. 38).

§ 40.

L. CN .. CS = CD .. CT (§ 35).

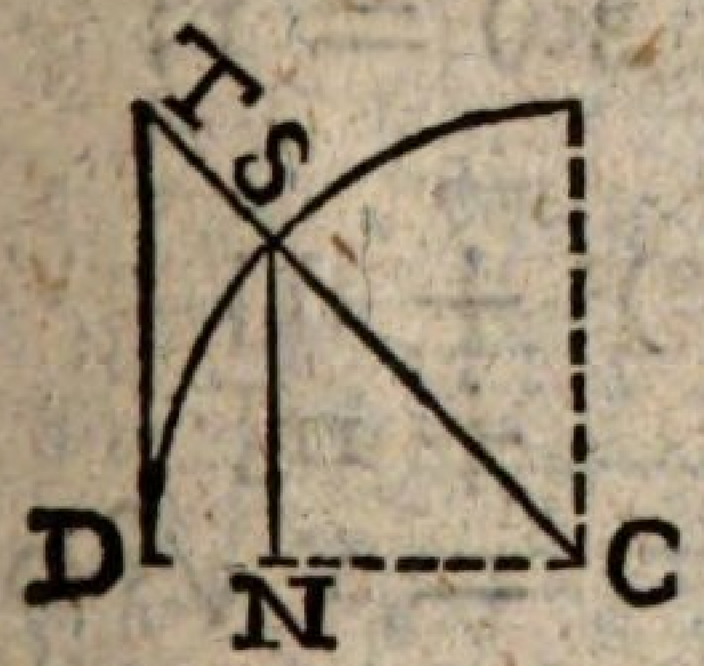
Gibt man diesen Linien ihre trigonometrischen Namen, so erhält man : :

S. Cosin. x .. r = r .. Sec. x

Secante x = rr : Cosin. x.

L. Aus dem Cosinus also lässt sich die Secante finden. Und da der Cosinus aus dem Sinus gefunden wird (§ 19), so lässt sich die Secante auch aus dem Sinus berechnen. Und da die Cosinusse bejaht und verneint seyn können (§ 18); so solte die Formel eigentlich so aussehn;

Sec. x = rr : ± Cosin. x.



Und da ferner einerlei Zeichen bejahte, verschiedene aber verneinte Quotienten geben (A. § 145); so fliesst hieraus die Lehre : :

S. Cosinusse und Secanten gleicher Bögen haben einerlei Zeichen. Oder auch die Cosinusse und Cosecanten der beiden mittelsten Quadranten stehn denen der beiden äußersten entgegen.

L. So bestätigen Rechnung und Zeichnung (§ 30) einander.

§ 41.

L. Wie groß sind die Quadrate von DT und CD zusammen?

S. $DT^2 + CD^2 = CT^2$ (G. § 160).

L. Das trigonometrsch ausgedrukkt : : ?

S. $(\text{Tang. } x)^2 + rr = (\text{Sec. } x)^2$.

L. Nun Secante x?

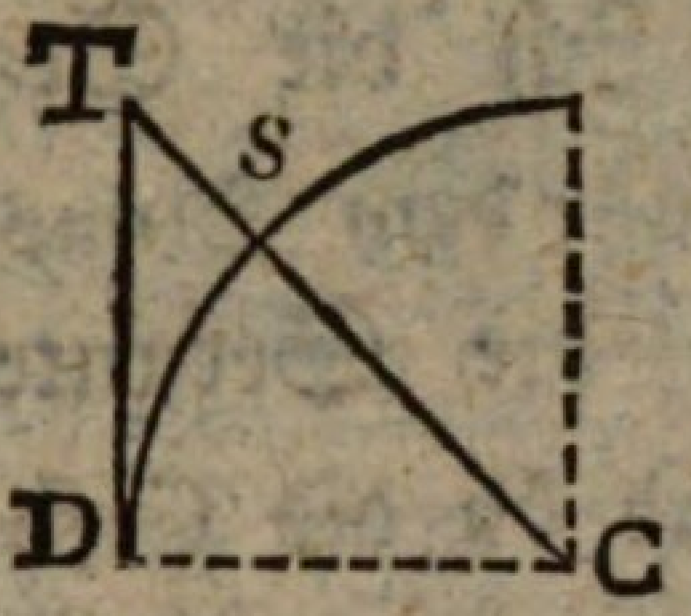
S. $\sqrt{[(\text{Tang. } x)^2 + rr]} = \text{Sec. } x.$

L. Und Tangente x?

S. $(\text{Tang. } x)^2 + rr = (\text{Sec. } x)^2$

$(\text{Tang. } x)^2 = (\text{Sec. } x)^2 - rr$

$\text{Tang. } x = \sqrt{[(\text{Sec. } x)^2 - rr]}.$



L. Also $\sqrt{[(\text{Tg. } x)^2 + rr]} = \text{Sec. } x$ und $\sqrt{[(\text{Sec. } x)^2 - rr]} = \text{Tg.} x$ Was bedeutet das?

S. Aus der Tangente wird die Secante, und aus der Secante wird die Tangente gefunden.

L. Es sei Tangente $45^\circ = r$ (§ 36) $= 1$; welches ist die Secante von 45°?

S. $\text{Sec. } 45^\circ = \sqrt{[(\text{Tang. } 45^\circ)^2 + rr]}$
$= \sqrt{[rr + rr]}$
$= \sqrt{2 rr} = r\sqrt{2}$
$= 1{,}414213565.$

L. Nun sei Secante $45^\circ = 1{,}414213565$: welches ist Tangente 45°?

S. $\text{Tang. } 45, = \sqrt{[(\text{Sec. } 45^\circ)^2 - rr]}$
$= \sqrt{1{,}414213565^2 - 1^2}$
$= 2 - 1 = 1.$

§ 42.

L. CT .. CS = TD .. SN = CD .. CN (A. § 158) Dieses trigonometrisch ausgedrukkt : : ?

S. Sec. x .. r = Tg. x .. Sin. x = r .. Cos. x.

L. Hieraus kan man nach der VerhältnißRegel (A. § 294) mehre Formeln für die Sinusse, die Cosi-

nusse, die Tangenten, und die Secanten finden. — Zuerst für die Sinusse!

S. 1) $\text{Sec. } x \,..\, r = \text{Tg. } x \,..\, \text{Sin. } x$

$$\text{Sin. } x = (r \times \text{Tg. } x) : \text{Sec. } x$$
$$= (r \times \text{Tg. } x) : \sqrt{[(\text{Tg. } x)^2 + rr]} \text{ (§ 41)}$$

2) $r \,..\, \text{Cos. } x = \text{Tg. } x \,..\, \text{Sin. } x$ (A. § 286)

$$\text{Sin. } x = (\text{Cos. } x \times \text{Tg. } x) : r.$$

L. Nun für die Cosinusse!

S. 1) $\text{Tg. } x \,..\, \text{Sin. } x = r \,..\, \text{Cos. } x$

$$\text{Cos. } x = [(\text{Sin. } x) \times r] : \text{Tang. } x$$

2) $\text{Sec. } x \,..\, r = r \,..\, \text{Cos. } x$

$$\text{Cos. } x = rr : \text{Sec. } x$$
$$= rr : \sqrt{[(\text{Tg. } x)^2 + rr]} \text{ (§ 41)}$$

L. Nun für die Tangenten!

S. 1) $r \,..\, \text{Sec. } x = \text{Sin. } x \,..\, \text{Tang. } x$

$$\text{Tg. } x = (\text{Sec. } x \times \text{Sin. } x) : r$$

2) $\text{Cos. } x \,..\, r = \text{Sin. } x \,..\, \text{Tang. } x$

$$\text{Tang. } x = (r \times \text{Sin. } x) : \text{Cos. } x.$$

Diese Formel war schon bekant (§ 35).

L. Nun für die Secanten!

S. 1) $\text{Sin. } x \,..\, \text{Tg. } x = r \,..\, \text{Sec. } x$

$$\text{Sec. } x = (\text{Tg. } x \times r) : \text{Sin. } x$$

2) $\text{Cos. } x \,..\, r = r \,..\, \text{Sec. } x$

$$\text{Sec. } x = rr : \text{Cos. } x.$$

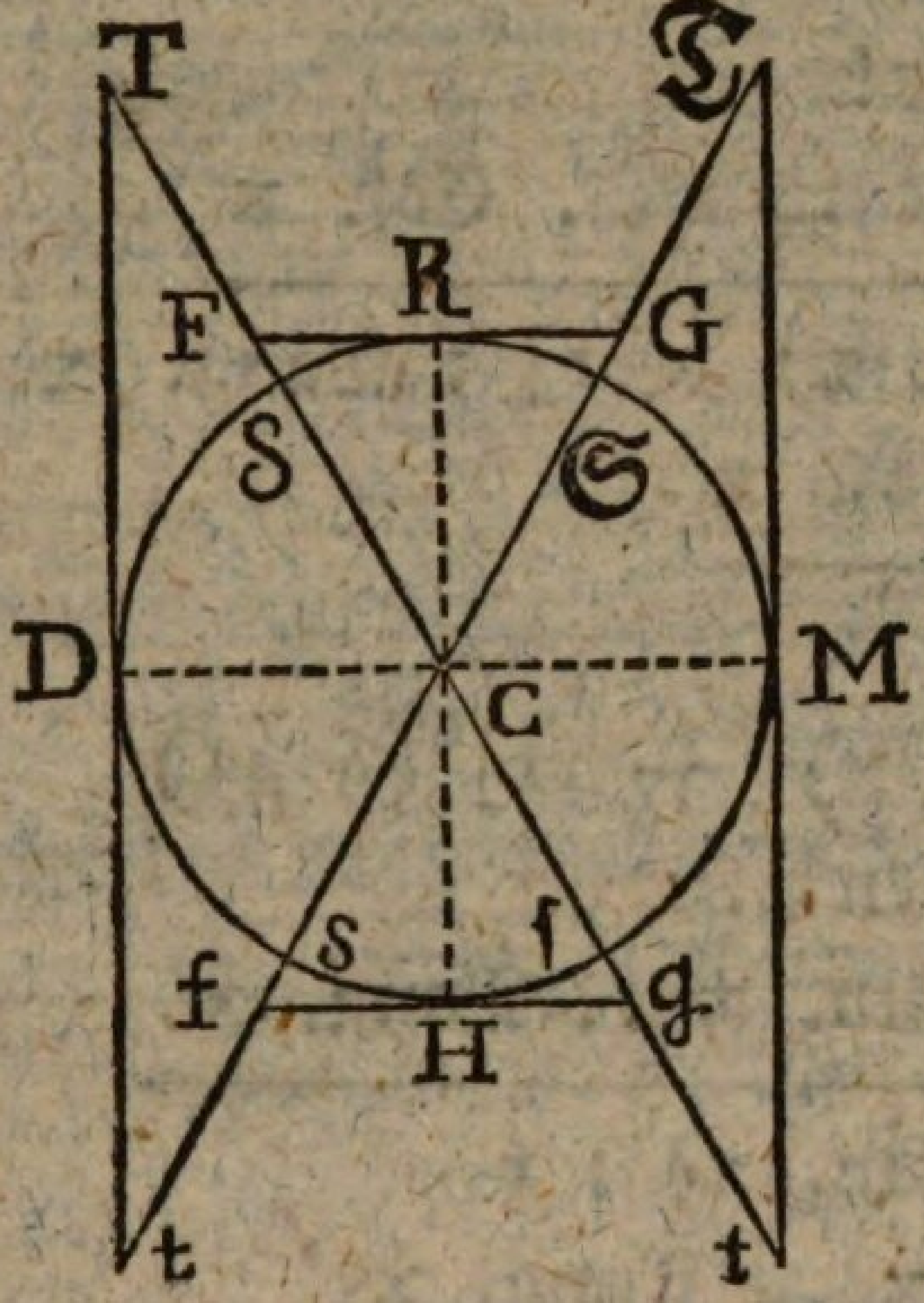
Ist auch schon bekant (§ 37).

L. Da haben wir Formeln, in welchen Tangenten und Secanten, mit Sinussen und Cosinussen in Verbindung gebracht sind, und welche noch kürzer werden, wenn man $r = 1$ annimt.

z. B. Sin. x = (Cos. x × Tang. x) : 1
= (Cos. x × Tang. x)
und Cos. x = (Sin. x × 1) : Tang. x,
= Sin. x : Tang. x.

§. 43.

Sechste Erklärung.



L. Wenn zwei Durchmesser, DM und RH, sich senkrecht schneiden, und die Tangente einen EndPunkt D oder M des einen DM streift, so streift die Cotangente einen EndPunkt R oder H des andern RH, und reicht von da bis an die Secante, CT, CT, oder deren Verlängerung. — Nach dieser Beschreibung wird sich jedes Bogens Cotangente und Cosecante bestimt angeben lassen. Des Bogens DS Tangente ist DT; welches ist nun seine Cotangente?

S. Cotangente DS ist RF.

L. Und seine Cosecante?

S. Cosecante DS ist CF.

L. Und des Bogens DS Cotangente und Cosecante?

S. Cotangente DS ist RG.
Cosecante DS ist CG.

L. Und der Bögen DSſ, DSs?

S. Cotangente DSſ ist Hg.
Cosecante DSſ ist Cg.
Cotangente DSs ist Hf
Cosecante DSs ist Cf.

L. Lägen die Tangenten an RH, wo würden dan die Cotangenten liegen?

S. An DM.

L. Und welches ist des Bogens RS Cotangente und Cosecante?

S. Cotangente RS ist DT
und Cosecante RS ist CT.

§ 44.

L. Wenn S näher an D rükkt, was wird dan aus Tangente und Cotangente?

S. So wie S sich D nähert, nimt die Tangente ab, und die Cotangente zu, bis in D die Tangente Null, und die Cotangente unendlich lang wird.

L. Und eben so die Cosecante. — Des Bogens Null Cotangente und Cosecante also sind unendlich. Wie wird es aber, wan der Bogen wächst?

S. Vom Bogen Null bis zum ViertelUmfange, nimt die Cotangente ab von unendlich bis Null.

L. Wan aber der Bogen grösser wird als 90 Grad?

S. Wird der Bogen grösser als der ViertelUmfang, so kömt die Cotangente in entgegen stehender Richtung wieder zum Vorschein, und wächst im zweiten Quadranten von Null bis unendlich. Im dritten Quadranten steht sie der im zweiten entgegen, und nimt ab von unendlich bis Null; und im vierten kömt sie in entgegen stehender Richtung wieder hervor, und wächst von Null bis unendlich.

L. Ist die Cotangente bejaht im ersten Quadranten : :

S. So ist sie im zweiten verneint; im dritten wieder bejaht; im vierten wieder verneint.

L. Und die Cosecanten?

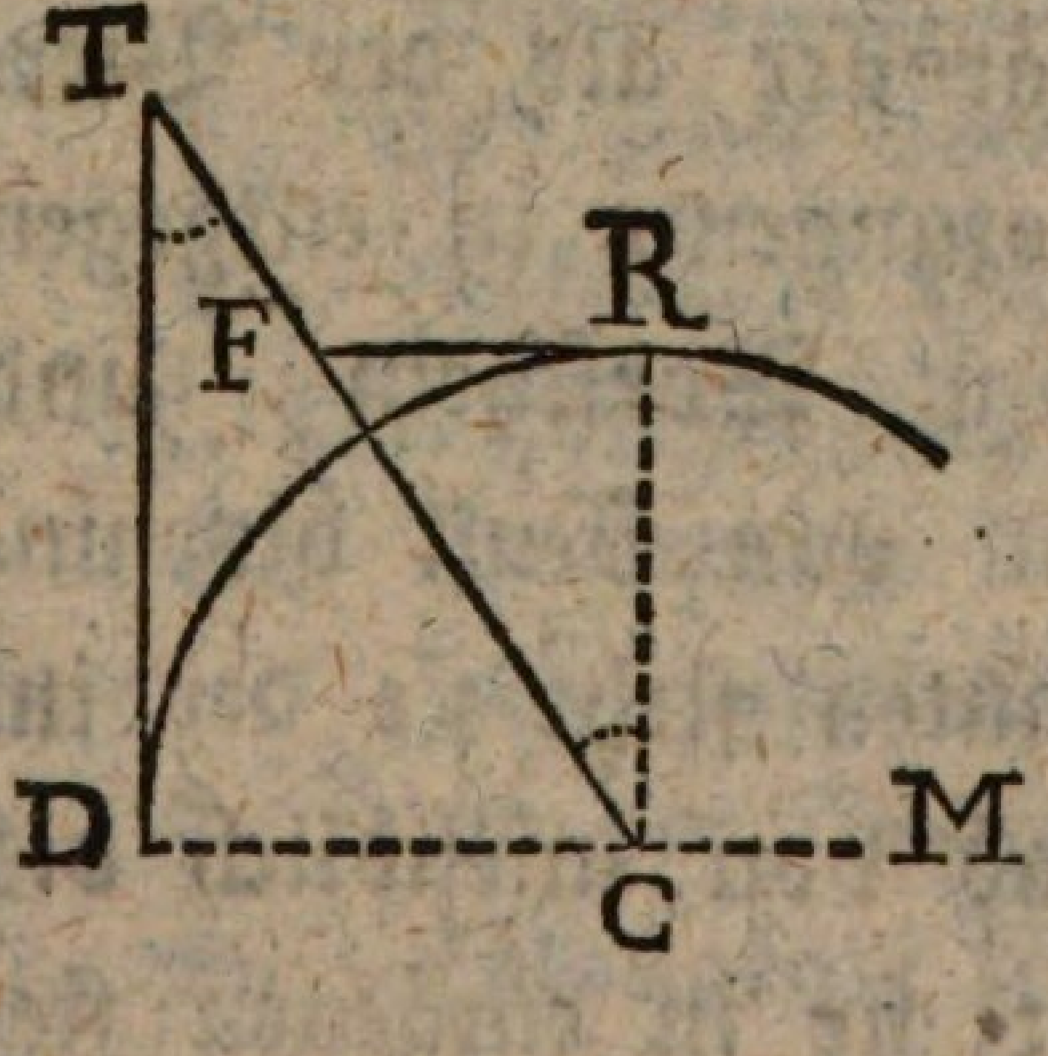
S. Im ersten und dritten Quadranten nehmen die Cosecanten ab, von unendlich bis zum Halbmesser; im zweiten und vierten wachsen sie vom Halbmesser bis unendlich.

L. Und sind sie im ersten Quadranten bejaht : :

S. So sind sie es auch im zweiten; im dritten und vierten aber sind sie verneint; denn sie folgen, wie die Secanten (§ 38), ihrem nächsten Halbmesser.

L. Wir werden eben dieses in der Folge durch Rechnung finden (§ 46. 47).

§ 45.



L. Es sei DR ein Quadrant, und DT eine Tangente: Wie stehn nun RC und DT auf dem Durchmesser?

S. Beide senkrecht (G. § 221. 193).

L. Und welche Richtung haben sie gegen einander?

S. Sie sind einander gleichlaufend (G. § 106).

L. Und welcher von den Winkeln T und TCR ist der größte?

S. ∠ T = ∠ FCR (G. § 112).

L. Die Dreiekke DCT und RFC also haben

∠ D = ∠ R (G. § 49)

∠ T = ∠ FCR (Bew.)

S. ∠ TCD = ∠ CRF (G. § 122)

△ TCD ∾ △ CRF (G. § 258)

TD ∴ DC = CR ∴ RF (G. 258).

L. Dieses trigonometrisch ausgedrükkt = = ?

S. Tang. x ∴ r ∴ Cotang. x.

L. Die Cotangente also ist gegeben durch die Tangente; oder wird gefunden, wenn die Tangente bekant ist. Und da die Tangente wiederum aus Sinus oder Cosinus gefunden wird (§ 36); so erhellt = = ?

S. Daß die Cotangente auch durch Sinus, oder durch Cosinus gegeben ist.

L. Welches ist hier die Formel für Cotangente x?

S. Cotang. x = rr : Tang. x (A. § 294).

L. Da Tang. x = r (Sin. x) : Cos. x (§ 35): so lässt Cotang. x sich noch anders ausdrükken.

S. Cotang. x = rr : [r (Sin. x) : Cosin. x]

= rr Cosin. x : r Sin. x

= r Cosin. x : Sin. x.

L. Es sei r = 1.

S. So ist Cot. x = 1 : Tg. x = Cos. x : Sin. x.

§ 46.

L. Da die Tangenten ungleichartig seyn können (§ 30); so kan die Formel

Cotang. x = rr : Tang. x (§ 48)

auch heissen

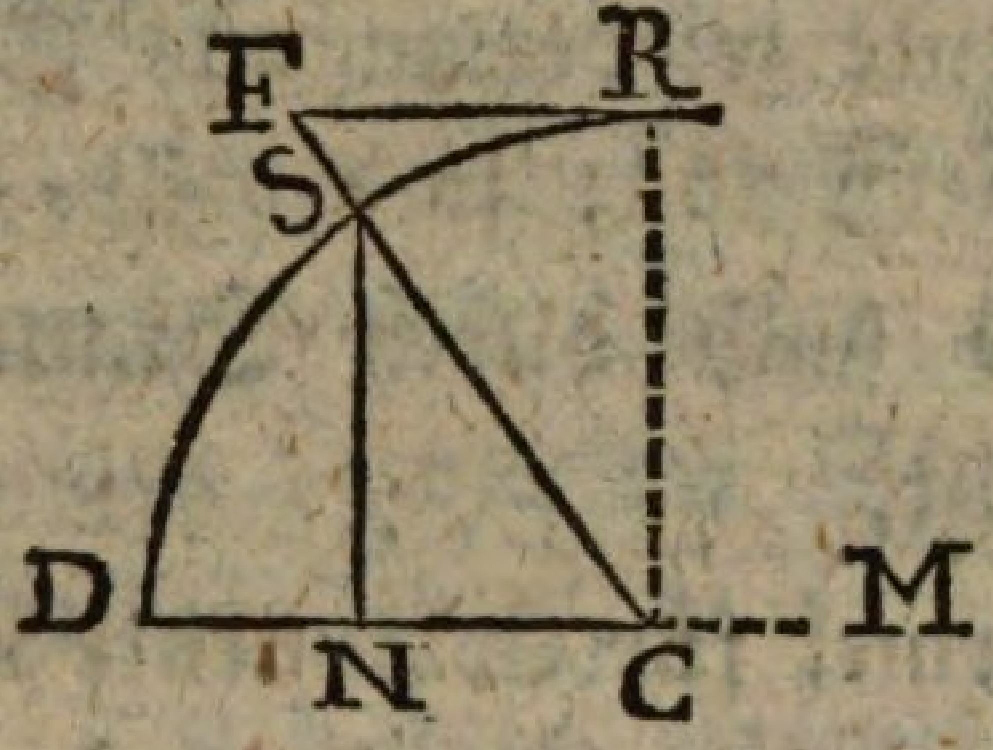
Cotang. x = rr : ± Tang. x.

Und da nun die Quotienten bejaht oder verneint ausfallen, je nachdem die Tangenten Eins oder das Andre sind (A. § 145); so fliesst hieraus für die Tangenten und Cotangenten eine ähnliche Lehre, als für die Cosinusse und die Secanten (§ 40). Welches ist die?

S. Die Cotangenten haben mit ihren Tangenten stets einerlei Zeichen.

L. Also auch hier geben Rechnung und Zeichnung einerlei Resultat (§ 44).

§ 47.



L. Es sei SN der Sinus des Bogens DS; so entsteht ein neues Dreiekk SNC. Was ist uns nun von den Dreiekken SNC und CRF bekant?

S. Sie sind beide einander ähnlich. Denn

1) haben sie bei N und R rechte Winkel (§ 1. 29);

2) ist auch der Winkel NCR ein rechter (G. § 221); folglich SN ⵌ RC (G. §. 105);
folglich ∠ SCN = ∠ RCF (G. § 112);
folglich △ SNC ∾ △ CRF (G. § 122. 258).

L. Ihre Seiten sind also proportionirt (G. § 258). Wer kan mir nun eine Proportion angeben, in welcher CF, die Cosecante des Bogens DS, das lezte Glied ist?

S. SN .. SC = CR .. CF

Sin. x .. r = r .. Cosec. x.

L. Also Cosec. x = rr : Sin. x (G. § 294). Oder wenn r = 1 : : ?

S. So ist Cosec. x = 1 : Sin. x.

L. Aus dem Sinus also findet man die Cosecante. — Aber welche Bezeichnung hat die Cosecante?

S. Die Cosecante hat mit ihrem Sinus einerlei Bezeichnung (A. § 145).

L. Nun aber stehn die Sinusse der beiden ersten Quadranten denen der beiden letztern entgegen (§ 9); folglich auch die Cosecanten.

§. 48.

L. Auch Cotangente und Cosecante lassen sich in Verbindung bringen, und zwar vermittels des pythagorischen Lehrsatzes.

S. 1) $CF^2 = CR^2 + FR^2$ (G. § 160)

$$(\text{Cosec. } x)^2 = rr + (\text{Cotang. } x)^2$$

$$\text{Cosec. } x = \sqrt{[rr + (\text{Cotang. } x)^2]}.$$

2) $$rr + (\text{Cot. } x)^2 = (\text{Cosec. } x)^2$$

$$(\text{Cot. } x)^2 = (\text{Cosec. } x)^2 - rr$$

$$\text{Cot. } x = \sqrt{[(\text{Cosec. } x)^2 - rr]}$$

L. Also: Aus der Cotangente läßt sich die Cosecante, und aus der Cosecante die Cotangente finden; oder mit einem Worte: Cotangente und Cosecante bestimmen einander. — Nimt man den Halbmesser $= 1$ an; so werden die Rechnungen kürzer.

S. $$\text{Cosec. } x = \sqrt{[1 + (\text{Cotang. } x)^2]}$$

$$\text{Cotang. } x = \sqrt{[(\text{Cosec. } x)^2 - 1]}.$$

§. 49.

L. Alle bisher erklärte acht Linien (nemlich Sinus (§ 1), Cosinus (§ 15), QuerSinus (§ 21),

QuerCosinus (§ 25), Tangente, Secante (§ 29), Cotangente, Cosecante (§ 43) heissen mit einem gemeinschaftlichen Namen trigonometrische Linien.

Als Verdeutschung der lateinischen Benennungen dieser Linien hat Prof. Burja für Sinus, Stütze; für Tangente, Taste; für Secante, Schnittlinie; für QuerSinus, QuerStütze; für Sinus totus, HauptStütze; für Cosinus, NebenStütze; für Cotangente, NebenTaste; für Cosecante, NebenSchnittlinie; für QuerCosinus, NebenQuerStütze, vorgeschlagen. Ob diese Benennungen Glükk machen werden, muß die Zeit lehren. Ich habe Tangente durch Streiflinie übersetzt, weil mir diese Benennung passender deucht als Herrn Burjas Taste, oder der von Andern, und auch ehemals von mir selbst gebrauchte Name Berührungslinie.

§ 50.

L. Wie aus dem Sinus die übrigen trigonometrischen Linien gefunden werden, ist schon gelehrt (§ 19. 22. 27. 38. 40. 45). Man kan aber auch umgekehrt, aus jeder trigonometrischen Linie den Sinus finden. Zur Uebung wollen wir dieses von ein par Exempeln zeigen.

Cosin. x = $\sqrt{}$ [rr — (Sin. x)²] (§ 19): wie wird hieraus eine Formel für den Sinus gefunden.

S. $\sqrt{[rr - (\text{Sin. } x)^2]} = \text{Cosin. } x$

$$rr - (\text{Sin } x)^2 = (\text{Cosin } x)^2$$

$$rr = (\text{Cos. } x)^2 + (\text{Sin. } x)^2$$

$$rr - (\text{Cos. } x)^2] = (\text{Sin. } x)^2$$

$$\sqrt{[rr - (\text{Cos. } x)^2]} = \text{Sin. } x \text{ (§ 17)}$$

L. Und aus Tang. x = (Sec. x × Sin. x) : r (§ 41).

S. (Sec. x × Sin. x) : r = Tg. x

$$\text{Sec. x} \times \text{Sin. x} = \text{Tg. x} \times \text{r}$$

$$\text{Sin. x} = \text{r Tg. x : Sec. x}$$

L. Wil man eine Formel, worin der Sinus bloß aus Tangenten gefunden wird; so darf man nur für Secante x eine andre Formel (§ 41) setzen.

S. $\text{r Tg. x : Sec. x} = \text{r Tg. x} : \sqrt{[(\text{Tg. x})^2 + \text{rr}]}$
$= \text{Sinus x}$

L. Um Gebrauch von dieser Formel zu machen, wollen wir aus der bekanten Tangente von 45 Grad (§ 39) den Sinus suchen.

S. Tangente $45^\circ = \text{r} = 1$

$$\begin{aligned}\text{Sin. } 45^\circ &= \text{Tg. } 45^\circ : \sqrt{[(\text{Tg. } 45^\circ)^2 + \text{r}} \\ &= 1 : \sqrt{(1 + 1)} \\ &= 1 : \sqrt{2} = \sqrt{2} : 2 \text{ (A. § 192)} \\ &= 1{,}41421356 : 2 \\ &= 0{,}70210676 \text{ (§ 6).}\end{aligned}$$

§. 51.

L. Die Formeln und Berechnungen der trigonometrischen Linien werden oft gebraucht: wir wollen daher, um sie bei der Hand zu haben, sammeln, und in Ordnung bringen.

Halbm.	r	1
Sinus x	$\sqrt{}$ [rr — (Cosin. x)^2] (§ 50)	$\sqrt{}$ [1 — (Cos. x)^2]
	r Tang. x : Sec. x (§ 42)	Tang. x : Sec. x
	(Cosinus x $\times$ Tang. x) : r (§ 42)	Cos. x : Tg. x
Sin. 22° 30′	$\sqrt{}$ [2 rr — 2 r $\sqrt{}$ (rr — ¼ SS)] : r (§ 7)	0,3826834
; 30°	½ r (§ 6) = Cosin 60°	0,5
; 45°	$\frac{r}{2}\sqrt{2}$ (§ 6) = Cosin 45°	0,707106782
; 60°	r $\sqrt{3}$: 2 = Cosin. 30° (§ 19)	0,8660254037
; 90°	r (§ 9) = Tang 45°	1
Cosin. x	$\sqrt{}$ [rr — (Sin. x)^2 (§ 19)	$\sqrt{}$ [1 — (Sin. x)^2]
; ;	r Sin. x : Tang. x (§ 42)	Sin. x : Tang. x
; ;	rr : Sec. x (§ 42)	1 : Sec. x
; 90°	0 (§ 18)	0
; 67° 30′	$\sqrt{}$ [2 rr — 2 r $\sqrt{}$ (rr — ¼ SS)] : r (§ 17)	0,3826834
; 60°	r : 2 = Sin. 30° (§ 19)	0,5
; 45°	r $\sqrt{2}$: 2 = Sin. 45°	0,707106782
; 30°	r $\sqrt{3}$: 2 = Sin. 60° (§ 19)	0,8660254037
QuerSin. x	r — Cosin x (§ 23)	1 — Cosin. x
; 30°	r — Sin 60°	0,1339745962
; 60°	r — Sin. 30°	0,5
; 90°	r (§ 21)	1
QuerCos. x	r — Sin x (§ 27)	1 — Sin. x
; 90°	0 (§ 26)	0
; 60°	r — Sin. 60°	0,1339745962
; 30°	r — Sin. 30°	0,5
Tang. x	r Sin x : Cosin x (§ 42)	Sin x : Cosin. x
; ;	(Sinus x $\times$ Sec. x) : r	Sin x : Sec. x
; ;	$\sqrt{}$ [(Sec x)^2 — rr] (§ 41)	$\sqrt{}$ [(Sec. x)^2 — 1]
; 45°	r (§ 29. 30) = Cosin. 45°	1
; 60°	Sin. 60° Cosin. 60° (§ 38)	1,732050807
; 90°	∞ (§ 29)	∞
Cotang. x	rr : Tang. x (§ 45)	1 : Tang. x
; ;	r Cosin. x : Sin. x (§ 45)	Cos. x : Sin. x
; ;	$\sqrt{}$ [(Cosec. x)^2 — rr] (§ 48)	$\sqrt{}$ [(Cosec. x)^2 — 1]
; 90°	0 (§ 44)	0
; 45°	r = Tang. 45° (§ 43)	1
Secante x	rr : Cosin. x (§ 42)	1 : Cosin. x
; ;	$\sqrt{}$ [(Tang. x)^2 + rr] (§ 41)	$\sqrt{}$ [(Tg. x)^2 + 1]
; 45°	r $\sqrt{2}$ (§ 41) = Cosec. 45°	1,41421356
; 90°	∞ (§ 29)	∞
Cosecante x	rr Sin. x (§ 47)	1 : Sin. x
; ;	$\sqrt{}$ [rr — (Cotang. x)^2] (§ 48)	$\sqrt{}$ [1 — (Cot. x)^2]
; 90°	r (§ 44)	1
; 45°	r $\sqrt{2}$ = Sec. 45°	1,41421356

§ 52.

L. Durch Hülfe dieser Tafel lassen sich nicht nur die Formeln für die trigonometrischen Linien bequem auffinden; sondern es lässt sich auch jede derselben in eine andre verwandeln, wenn man die darin vorkommenden Ausdrükke gegen gleichgeltende vertauscht. So ist, zum Beispiel:

QuerSinus x = r — Cosinus x

Sieht man nun in der Tafel nach, so findet man für Cosinus x drei Formeln.

S. Cosinus x = √ [rr — (Sin. x)²]
= r Sin. x : Tang. x
= rr : Sec. x

L. Jede dieser drei Formeln nun kan man in obiger Formel für Cosinus x setzen.

S. QuerSin. x = r — √ [rr — (Sin. x)²]
= r — (r Sin. x : Tang. x)
= r — (rr : Sec. x)

L. Und diese Formeln lassen sich wieder verändern, wenn man für (Sin. x)², für Tang. x, für Sec. x, oder auch für r, gleichgeltende Ausdrükke setzt: welche Mühe wir uns aber ersparen wollen.

§ 53.

L. Sinus x = √ [rr — (Cos. x)²]
= r Tg. x : Sec. x } (§ 51).

Wenn ich nun aber Formeln für Sinus 2 x verlangte?

S. Sinus 2 x = √ [rr — (Cosin. 2 x)²]
= r Tg. 2 x : Sec. x

L. Daß mit blosser Verwandlung des x in 2 x alles abgemacht sei, ist nur noch nicht ganz klar.

S. Es sei $2x = x$

so ist $\text{Sin. } x = \sqrt{[rr - \text{Cos. } x)^2]} = r \text{ Tg. } x : \text{Sec. } x$ (G. § 27)

L. Das ist richtig.

S. Nun verwandle ich x wieder in 2 x:

so ist $\text{Sin } 2x = \sqrt{[rr - \text{Cos. } 2x)^2]} = r \text{ Tg. } x : \text{Sec. } 2x$ (G. § 27)

L. Auch dawider låſſt ſich nichts einwenden. Geſetzt aber ich verlangte Formeln für $\frac{x}{2}$?

S. So sei $\frac{x}{2} = \beta$

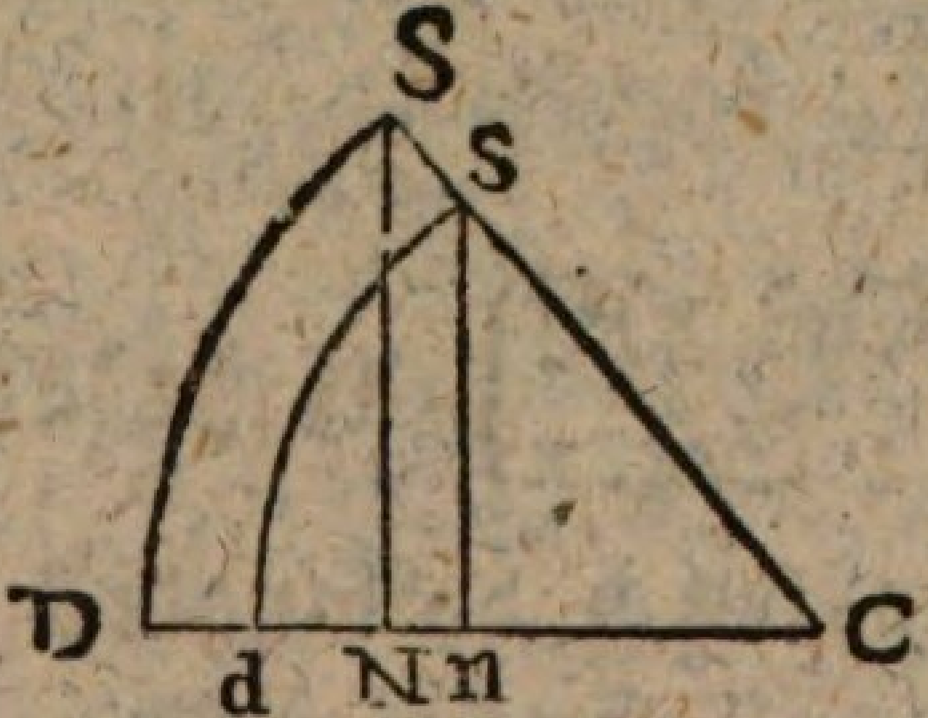
$$\frac{\text{Sin. } \beta = \sqrt{[rr - (\text{Cos. } \beta)^2]}}{\text{Sin. } \frac{x}{2} = \sqrt{[rr - (\text{Cos. } \frac{x}{2})^2]}}$$ (G. § 27).

L. Es laſſen ſich alſo die für x gefundene Formeln in andre für das Mehrfache und für die Teile von x verwandeln. Und wie?

S. Verlange ich eine Formel für das Mehrfache, ſo multiplicire ich x; wil ich eine für Teile desſelben, ſo dividire ich es durch die gegebene Zahl.

§ 54.

Erſter Satz.



L. Es wird ein beliebiger Winkel DCS gezeichnet. Zwiſchen den Schenkeln desſelben werden aus der Spitze C, zwei willkührliche Bögen DS und ds gezogen. — Woran ſind dieſe Bögen zu unterſcheiden?

S. An nichts als an ihrer Länge: denn ſie haben zum ganzen Umfange einerlei Verhåltniß (G. § 219).

L. Das heisst, sie sind sich ähnlich (G. § 24). — Nun werden auch ihre Sinusse SN und sn gezogen (§ 1); so entstehn zwei Dreiekke SNC und snC, welche auch einander ähnlich sind. Wie lässt sich diese Aehnlichkeit beweisen?

S. Die Winkel bei N und n sind einander gleich (G. § 49), und der Winkel C ist beiden gemein; folglich sind auch die Winkel bei S und s in beiden gleich groß (G. § 122); folglich beide Dreiekke einander gleichwinklig, oder ähnlich (G. § 258).

L. Und was folgt aus der Aehnlichkeit weiter?

S. Daß SN .. sn = CS .. Cs
und CN .. Cn = CS .. Cs } (G. § 257)

L. Es sei DS = V
dS = v
CS = R
Cs = r.

Hiernach wollen wir obige Formeln trigonometrisch ausdrükken.

S. Sin. V .. Sin. v = R .. r
Cos. V .. Cos. v = R .. r

L. Dieses in Worte gekleidet - - ?

S. Sinusse und Cosinusse ähnlicher Bögen verhalten sich zu einander wie ihre Halbmesser.

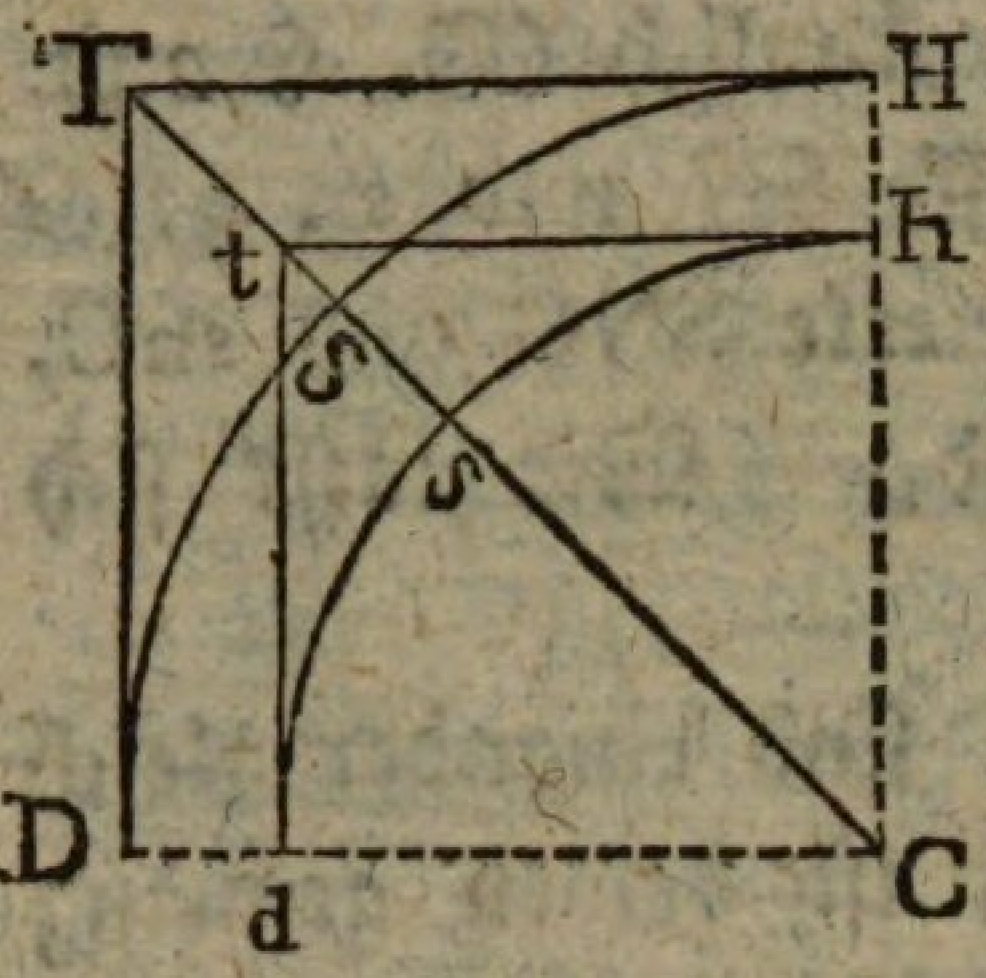
L. Recht! Aber was für ähnliche Bögen?

S. Die zu dem ganzen Umfange einerlei Verhältniß haben, oder gleich grosse Teile desselben sind; oder gleich viel Grade enthalten (G. § 220).

§ 55.

Zweiter Satz.

L. Ein Winkel und zwei KreisBögen wie vor-



hin (§ 54): anstat der Sinusse aber werden die Tangenten TD, td, und die Secanten TC, tc, gezogen. — Sind die Dreiekke TDC und tdc einander ähnlich, oder nicht?

S. Sie sind einander ähnlich, und zwar aus eben den Gründen als die vorigen (§ 54).

L. Und was folgt daraus?

S. Daß TD .. td = CD .. Cd } (G. § 257)
CT .. Ct = CD .. Cd

Trigonometrisch:

Tang. V .. Tang. v = R .. r

Sec. V .. Sec. v = R .. r

L. Wir wollen die Bögen vergrössern, bis zum ViertelKreise, und nun auch die Cotangenten TH und th, und die Cosecanten TC und tC ziehn; so entstehn wieder ein par ähnliche Dreiekke : :

S. △ THC ∾ △ thC

TH .. th = CH .. Ch

CT .. Ct = CH .. Ch

Trigonometrisch:

Cotang. V .. Cotang. v = R .. r

Cosec. V .. Cosec. v = R .. r

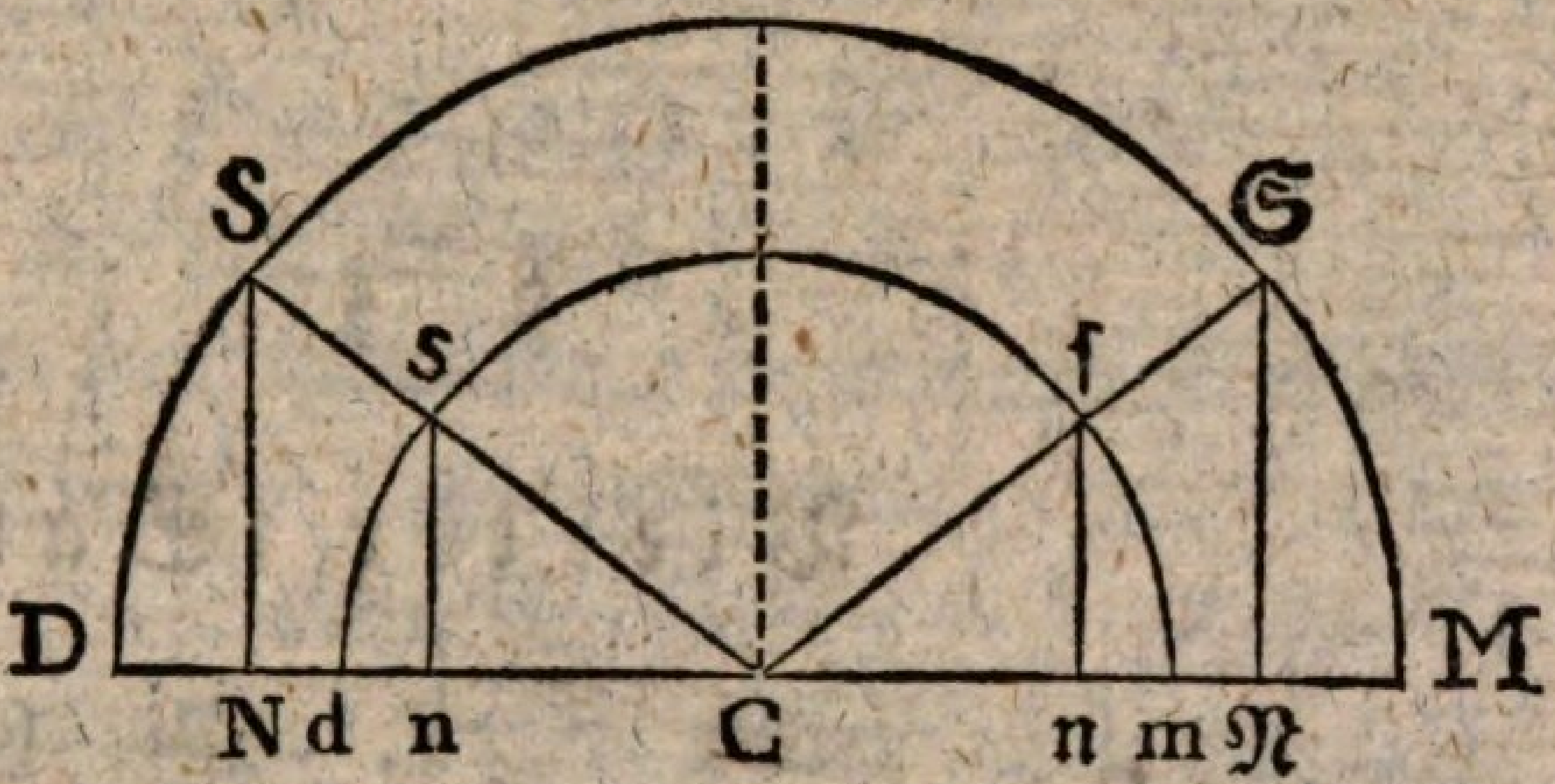
L. Dieses in Worte gekleidet : : ?

S. Tangenten, Cotangenten, Secanten und Cosecanten ähnlicher Bögen verhalten sich zu einander wie ihre Halbmesser.

§. 56.

Dritter Satz.

L. Nun ist noch von den QuerSinussen und QuerCosinussen zu beweisen, daß auch sie sich zu einander verhalten wie ihre Halbmesser.



S. Cn .. CN = Cd .. CD (§94)

(Cd—Cn) .. (CD—CN) = Cd .. CD (A. §287)

Das ist:

dn .. DN = Cd .. CD

Trigonometrisch:

QuerSin. v .. QuerSin v = r .. R.

L. Dieser Beweis passt nur auf den ersten Quadranten. Welches sind die QuerSinusse der Bögen DS𝔖 und ds𝔰 im zweiten?

S. QuerSinus DS𝔖 = D𝔑 } (§ 21).
QuerSinus ds𝔰 = dn }

L. Und der Beweis, daß D𝔑 sich zu dn verhält, wie R zu r?

S C𝔑 .. Cn = R .. r (§ 54)

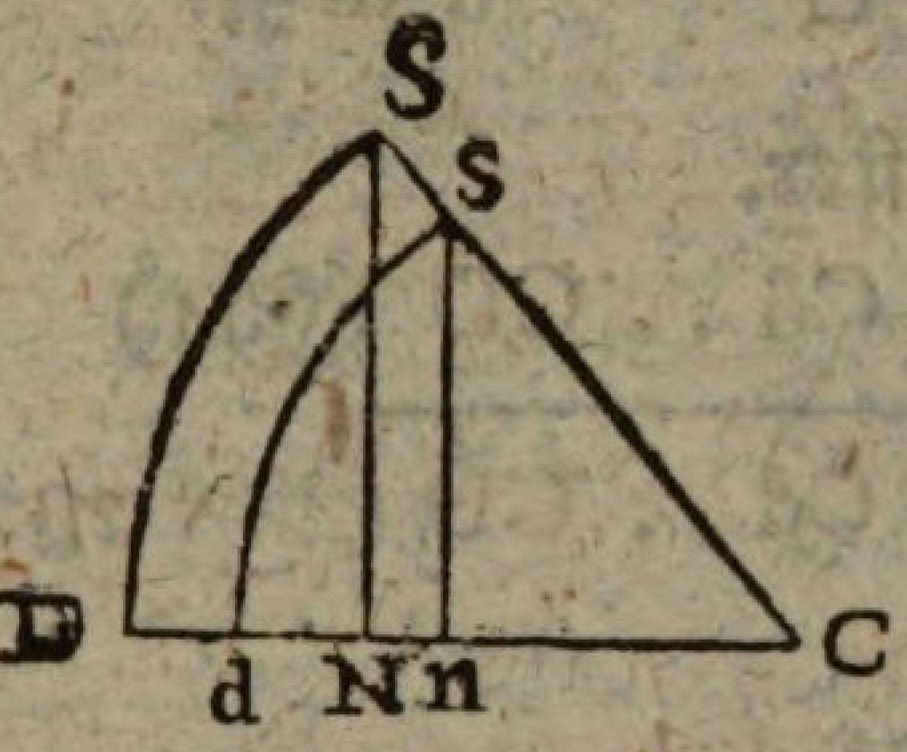
(C𝔑+R) .. (Cn+r) = R .. r (A. § 287).

L. Die QuerSinusse des dritten und vierten Quadranten sind denen des zweiten und ersten gleich (§ 21). Es ist also nun entschieden: die QuerSinusse verhalten sich zu einander wie ihre Halbmesser. — Wie ist es aber mit den QuerCosinussen?

S. Die QuerCosinusse sind zugleich QuerSinusse (§ 25): es gilt daher von den QuerCosinussen was von den QuerSinussen erwiesen ist.

§ 57.

Vierter Satz.



L. Wir haben nun von jeder trigonometrischen Linie erwiesen, daß sie sich zu ihres Gleichen verhält wie beide Halbmesser (§ 54. 55. 56), und können also alle zusammen fassen, und sagen: die gleichnamigen trigonometrischen Linien ähnlicher Bögen verhalten sich zu einander wie ihre Halbmesser. Gesetzt nun, ich kenne sn den Sinus des Bogens ds, dessen Halbmesser Cd, und auch CD den Halbmesser des Bogens DS: wie finde ich nun SN, den Sinus des Bogens DS?

S. Cd .. CD = sn .. SN

SN = (CD × sn) : Cd (A. § 294).

L. Das ist recht. Um dieses trigonometrisch einzukleiden, wollen wir die Bögen ds und DS, v und V, ihre Halbmesser aber r und R nennen.

S. r .. R = Sin. v .. Sin. V

Sin. V = R Sin. v : r

L. Und die Formel umgekehrt!

S. R .. r = Sin. V .. Sin. v

Sin. v = r Sin. V : R.

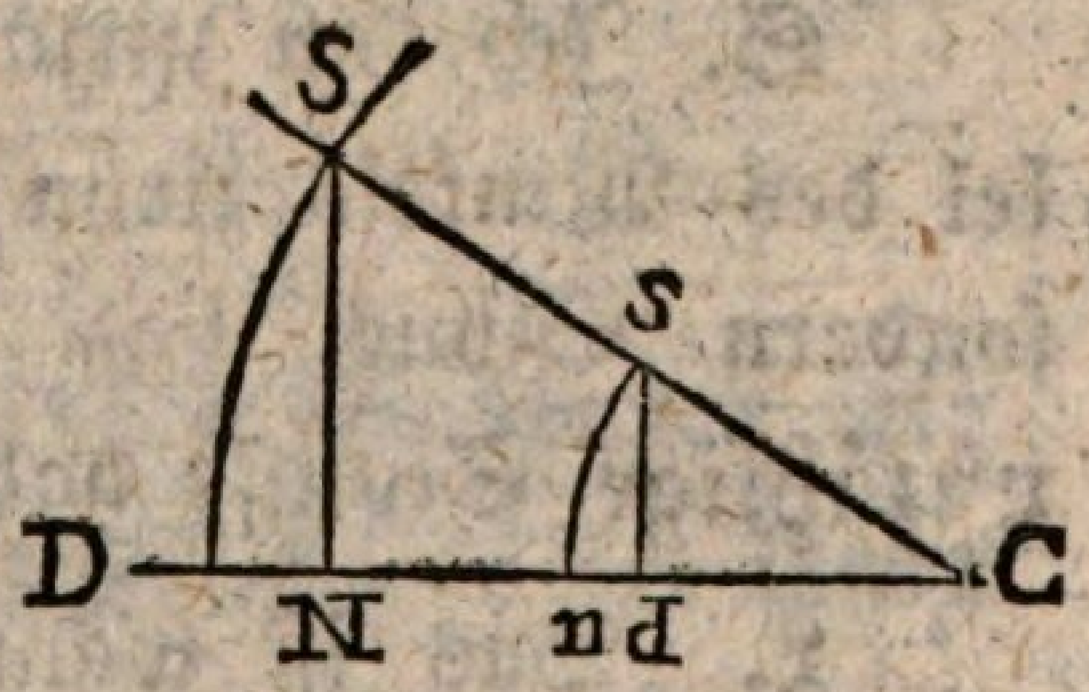
L. Es sei r = 1
R = 10
Sin. v = Sin. 30° = 0,5.
Wie groß ist Sin. V?

S. Sin. V = (10 × 0,5) : 1
= 10 × 0,5 = 5.

L. Wie mit den Sinussen, so mit allen andern trigonometrischen Linien. Sie erhalten sämtlich ihre bestimmte Länge erst durch ihr Verhältniß gegen die Halbmesser ihrer Bögen. Ist daher eine trigonometrische Linie eines Bogens, und dessen Halbmesser bekant, so lässt sich diese Linie für jeden ähnlichen Bogen, dessen Halbmesser gegeben ist, durch die ProportionsRechnung finden.

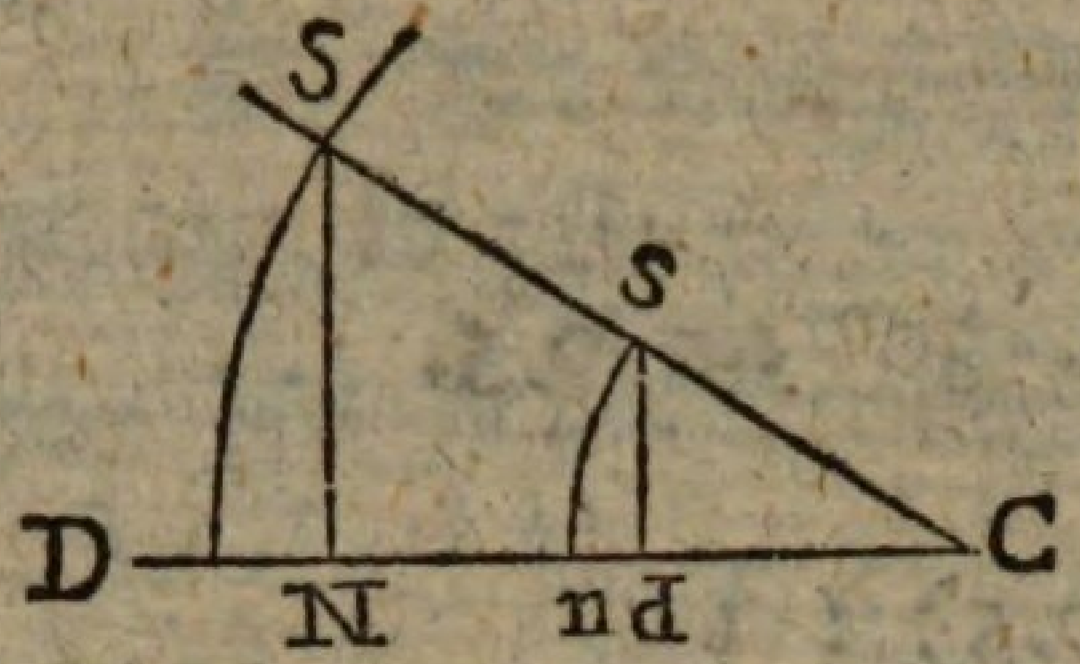
§ 58.

L. Welches ist das Maß eines Winkels C?



S. Ein aus der Spitze C beschriebener, von einem Schenkel bis zum andern reichender Bogen DS (G. § 220).

L. Verändert sich der Winkel; so verändert sich mit ihm auch der Bogen, welcher sein Maß ist; und umgekehrt. Da nun die Winkel, und die ihnen zum Maß dienenden Bögen in unzertrenlicher Verbindung stehn, in gleichem Verhältniß ab- und zunehmen; so beziehn sich die trigonometrischen Linien auf die einen wie auf die andern, und SN zum Beispiel, ist Sinus, nicht nur des Bogens



DS, sondern auch des Winkels C, welchem der Bogen DS zum Masse dient.

S. Die Sache ist verständlich.

L. Und demungeachtet nicht ohne Schwierigkeiten. Wir wollen mit Cd = ½ CD, innerhalb der Schenkel des Winkels C, einen zweiten Bogen ds, und auch seinen Sinus sn, zeichnen. Auch dieser Bogen ds ist das Maß des Winkels C: mithin auch sein Sinus sn, zugleich Sinus des Winkels C. — Sind aber sn und SN gleich lang?

S. Nein. Wenn Cd = ½ CD; so ist sn = ½ SN (§ 5).

L. So hätte ja also der Winkel C zwei Sinusse, sn und SN, von welchem der eine, sn halb so groß wäre, als der andre SN?

S. Ich kan unzählige Bögen zwischen die Schenkel des Winkels ziehn, vor welchen jeder seinen besondern Sinus hat. Der Winkel C würde also unzählige Sinusse haben.

L. Das ist wahr. — Wie ist diese Schwierigkeit zu heben?

S. Ist sn = ½ Cd, so ist SN = ½ CD (§ 57). Teile ich nun beide Halbmesser, Cd und CD, in gleich viel gleiche Teile, z. B. in 10; so enthält sn 5 Zehnteile von Cd, und SN 5 Zehnteile von CD. Und so lassen sich die Linien sn und SN, obgleich von ungleicher Länge, doch durch einerlei Zahl (hier 5) ausdrükken.

L. Recht! Und diese Zahl (5) nebst der, welche

anzeigt, in wie viel gleiche Teile der Halbmesser geteilt ist (10).

5 .. 10
= 1 .. 2

drukkt das Verhältniß des Sinus zum Halbmesser, nicht nur für den Winkel C = 30°, sondern auch für jeden aus seiner Spitze, zwischen seine Schenkel, beschriebenen Bogen DS, ds 2c. aus. Und gleiche Bewandniß hat es mit allen trigonometrischen Linien. Alle setzen den Halbmesser, er sei so lang er wolle, in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile geteilt, voraus, und solcher Teile bekommen die gleichnamigen Linien nicht nur ähnlicher Bögen, sondern auch ihnen entsprechender Winkel gleich viel. Die Zahlen nun, welche anzeigen, in wie viel gleiche Teile der Halbmesser geteilt ist, und wie viel solcher Teile auf eine trigonometrische Linie fallen, drükken beider Verhältniß zu einander aus. —

§ 59.

L. Um zu sehen, ob alles recht verstanden sei: welches ist die Tangente eines Bogens von 60 Grad für den Halbmesser 1?

S. 1,732050807 (§ 51).

L. Und die Tangente eines Winkels von 60 Grad, für eben den Halbmesser?

S. Ist auch 1,732050807.

L. Wie liesse sich nun wol das Verhältniß der Tangente von 60 Grad, zum Halbmesser 1, für Bögen und Winkel, ausdrükken?

S. Tang. 60° .. r = 1,732050807 .. 1

L. Und wenn man den Halbmesser = 10 annimt?

S. Tang. 60° .. r = 17,32058 .. 10.

L. Es ergibt sich hieraus, daß wenn man die Winkel und ihre Bögen durch Grade und Minuten ausdrükkt, die trigonometrischen Linien blosse Zahlen sind, welche bestimmten Winkeln und Bögen entsprechen, und einen in gewisse gleiche Teile geteilten Halbmesser voraussetzen.

§. 60.

L. Da es Bögen über 180 Grad gibt, so ist man, wenn die trigonometrischen Linien sich auf Winkel wie auf Bögen beziehn sollen, genötigt, in der Trigonometrie, wie in der Geometrie (§ 126) Winkel, welche größer sind als zwei rechte, anzunehmen. Und da die trigonometrischen Linien der Bögen oft ungleichartig sind (§ 9. 18); so findet ein Gleiches bei denen der WinkelStat.

II.

Zusammen-Setzung trigonometrischer Linien.

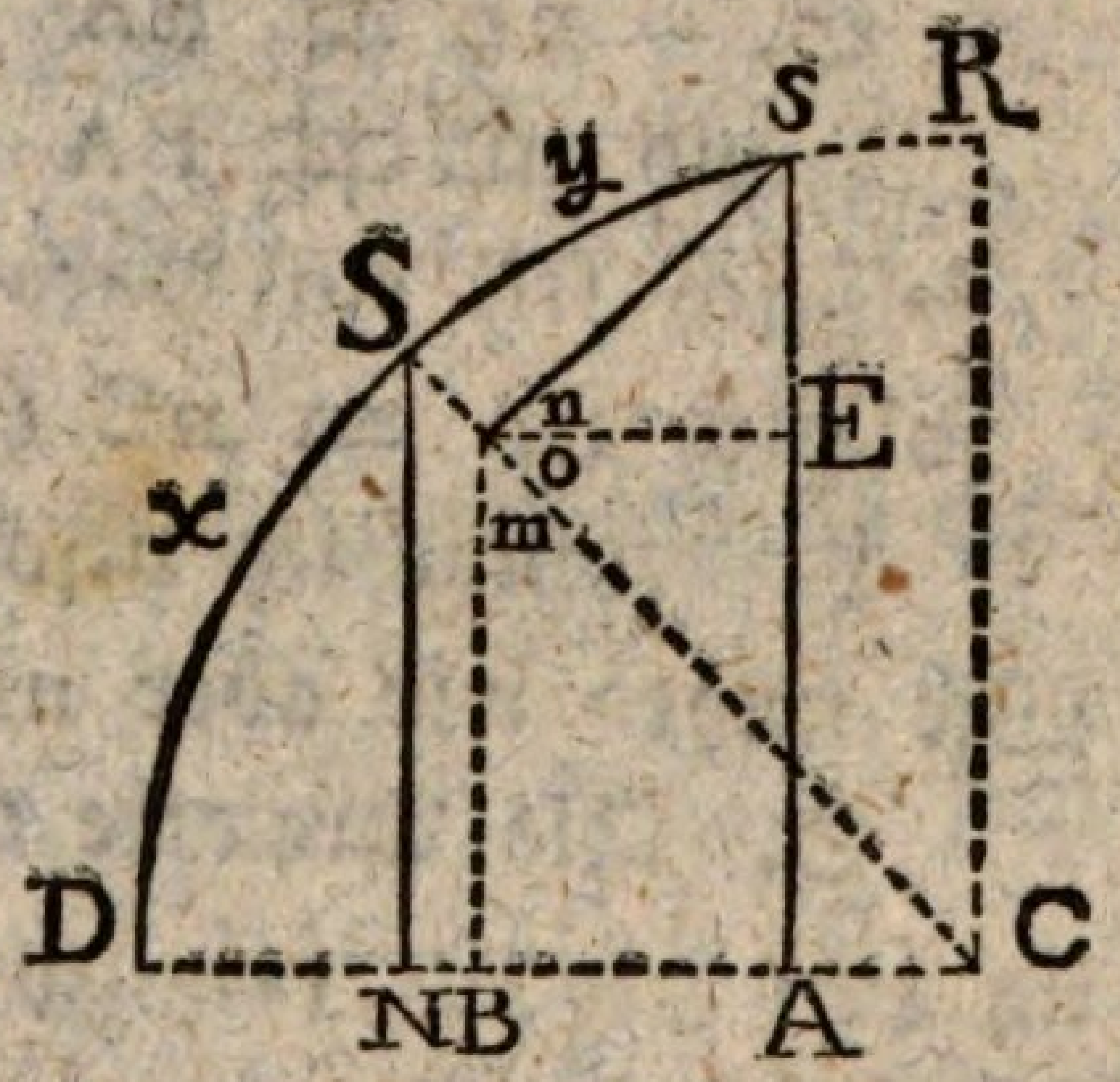
bis S. 100

(Diesen ganzen Abschnitt können Anfänger überschlagen.)

§ 61.

Fünfter Satz.

1. Es wird ein Viertel-Kreis DCR gezeichnet. Auf dem Umfange desselben werden von D aus, zwei aneinander gränzende, willkührliche Bögen DS und Ss, bemerkt, und durch den Halbmesser CS von einander abgesondert. Hierauf werden ihre Sinusse SN und sn gezogen. Endlich wird auch



der Sinus der beiden zusammen gesetzten Bögen, DS + Ss = sA, gezeichnet. — Der Bequemlichkeit wegen wollen wir den Bogen DS künftig x, den Bogen Ss aber y nennen. So ist nun

SN = Sinus x

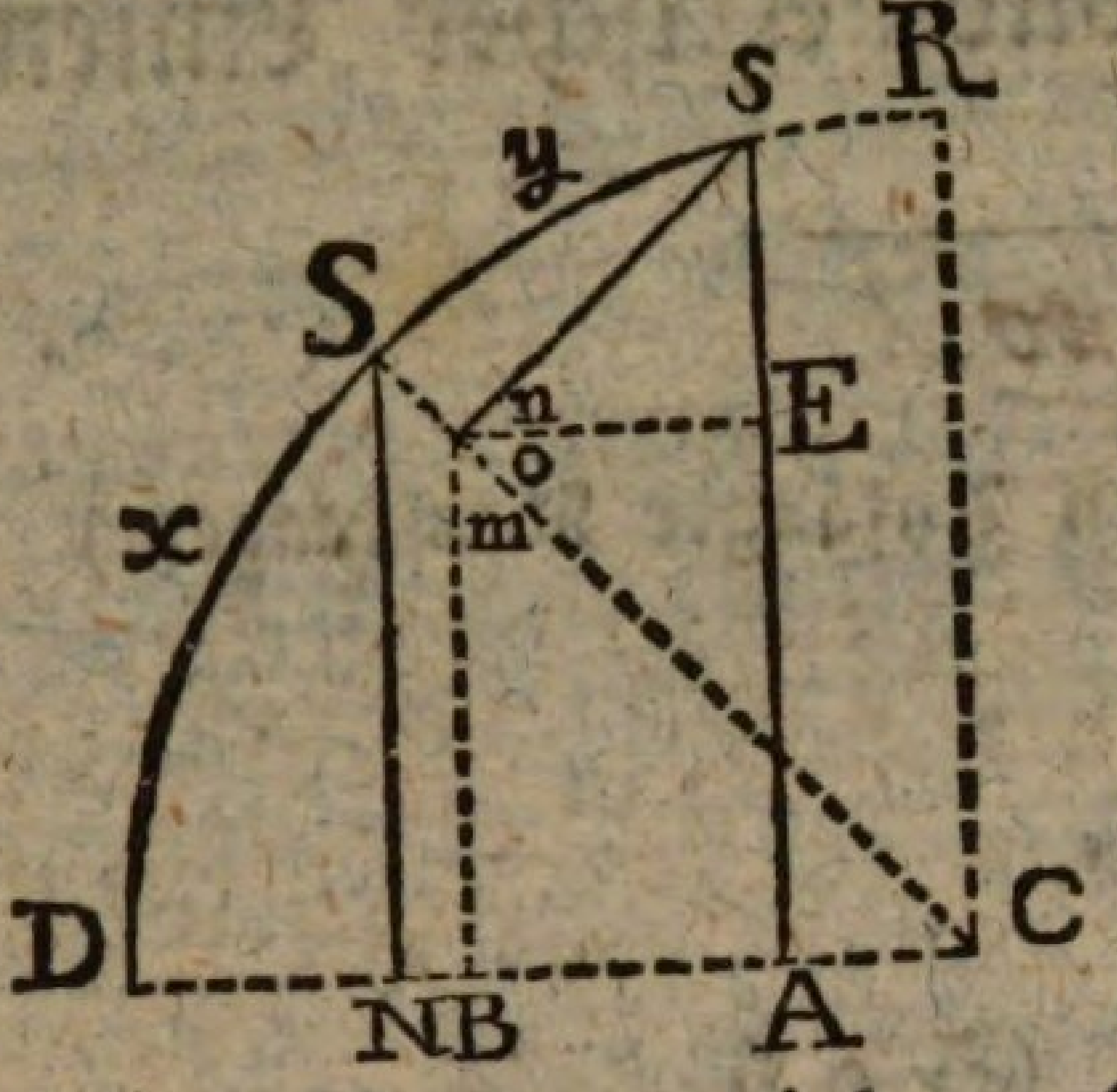
sn = Sinus y

sA = Sinus (x + y)

Sinus x und Sinus y werden gegeben: Sinus (x + y) wird gesucht. Dazu können uns die Cosinusse behülflich seyn. Welches sind die Cosinusse der Bögen x und y?

S. Cosin. x = CN = $\sqrt{}$ [rr — (Sin. x)²]
Cosin y = Cn = $\sqrt{}$ [rr — (Sin. y)²]

L. Nun sind noch ein par Hülfs-Linien nötig.



Beide werden, von n aus, auf die Linien DC und sA senkrecht gezogen. Die Durchschnitts-Punkte heissen B und E. — Durch die Linie nE ist Sinus (x + y) in zwei Stükke, EA und Es, zerschnitten, von welchen jedes besonders gefunden wird. Zuerst wollen wir EA suchen. Welche Linie ist dieser gleich?

S. nB ⌗ EA
und nE ⌗ BA } (G. § 106).

folglich BE ein Parallelogramm (G. § 129)
folglich EA = nB (G. § 130).

L. Kenne ich also nB, so kenne ich auch EA. Wie finden wir aber nB?

S. Die Dreiekke CNS und CBn sind gleichwinklig (G. §113); folglich einander ähnlich (G. § 258). Folglich

CS .. SN = Cn .. nB (G. § 258).

Trigonometrisch:

r .. Sin. x = Cosin. y .. nB

(nB = EA) = (Sin. x × Cos. y) : r (A. § 294)

L. Nun fehlt uns noch SE: wie werden wir das finden?

S. Das weis ich nicht.

L. Wir wollen die Dreiekke sEn und CBN genauer betrachten, ob wir keine Aehnlichkeit an ihnen entdekken.

S. Beide haben rechte Winkel bei E und B (Verf.)
Hiernächst ist n + o = = m + o (G. § 134)

Folglich n = m (G. [37)

Folglich auch ∟ Esn = ∟ BCn (§ 122)

Folglich △ sEn ∾ CBN (G. § 258)

sn .. sE = Cn .. CB (G. § 258) = CS .. CN (Bew.)

CS .. CN = sn .. sE (A. § 277)

r .. Cos. x = Sin. y .. sE

sE = (Cosin. x × Sin. y) : r.

L. Nun haben wir also Formeln für EA und sE, welche zusammen sA ausmachen.

S. EA = (Sin. x × Cos. y) : r
sE = (Cos. x × Sin. y) : r

sA = Sin. (x + y) = [(Sin. x × Cos. y) + (Cos. x × Sin. y)] : r

L. Wie wird nun dieser Satz als Aufgabe eingekleidet?

S. Aus den Sinussen zweier Bögen den Sinus ihrer Summe zu finden.

L. Und die Auflösung lautet = = ?

S. Man multiplicirt jedes Bogens Sinus durch den Cosinus des andern, addirt die Produkte, und dividirt ihre Summe durch den Halbmesser.

L. Um eine Anwendung davon zu machen, sei

$x = 45°$
$y = 30°$

$x + y = 75°$

Die Sinusse von 30 und von 45 Grad haben wir schon berechnet. Welches sind die Formeln dafür?

S. $Sin.\ 30^\circ = r : 2$ } (§ 51).
$Sin.\ 45^\circ = r\sqrt{2} : 2$

L. Dieser Formeln wollen wir uns bedienen, um den Sinus von 75 Grad, für den Halbmesser 1 *), zu berechnen.

S. $Sin.(x+y) = [(Sin.\ x \times Cos.\ y) + (Cos.\ x \times Sin.\ y] : r$

$Sin.\ 75^\circ = [(Sin.\ 45^\circ \times Cos.\ 30^\circ) + (Cos.\ 45^\circ \times Sin.\ 30^\circ] : r$

$= (\sqrt{2} : 2 \times \sqrt{3} : 2) + (\sqrt{2} : 2 \times \tfrac{1}{2})$ (§ 51

$= \sqrt{6} : 4 + \sqrt{2} : 4$

$= (\sqrt{6} + \sqrt{2}) : 4$

$= (2,44948974 + 1,41421356) : 4$

$= 3,86370330 : 4$

$= 0,96592582.$

L. Es ist nützlich eine Sache auf mehr als eine Art berechnen zu können: wir wollen dieses Exempel also auch nach Kästners und Lorenzens Art ausrechnen. In der fünften Zeile weicht sie von der unsrigen ab.

$$(\sqrt{6} + \sqrt{2}) : 4 = \frac{\sqrt{2}\,(1 + \sqrt{3})}{4}$$ (A. § 189)

$= 1,41421356 \times 2,73205080$

$= 3,8637032 : 4$

$= 0,9659258$

Noch auf andre Art;

$Sin.\ 75^\circ = (Sin.\ 45^\circ \times Cos.\ 30^\circ) + (Cos.\ 45^\circ \times Sin.\ 30^\circ)$ nach der ersten Rechnung: Nun ist

$Sin.\ 45^\circ = 0,70710678 = Cos.\ 45^\circ$ }
$Cos.\ 30^\circ = 0,8660254$ } (§ 51)
$Sin.\ 30^\circ = 0,5$ }

S. $Sin.\ 75^\circ = 0,70710678 \times 0,8660254$
$+ 0,70710678 \times 0,5$

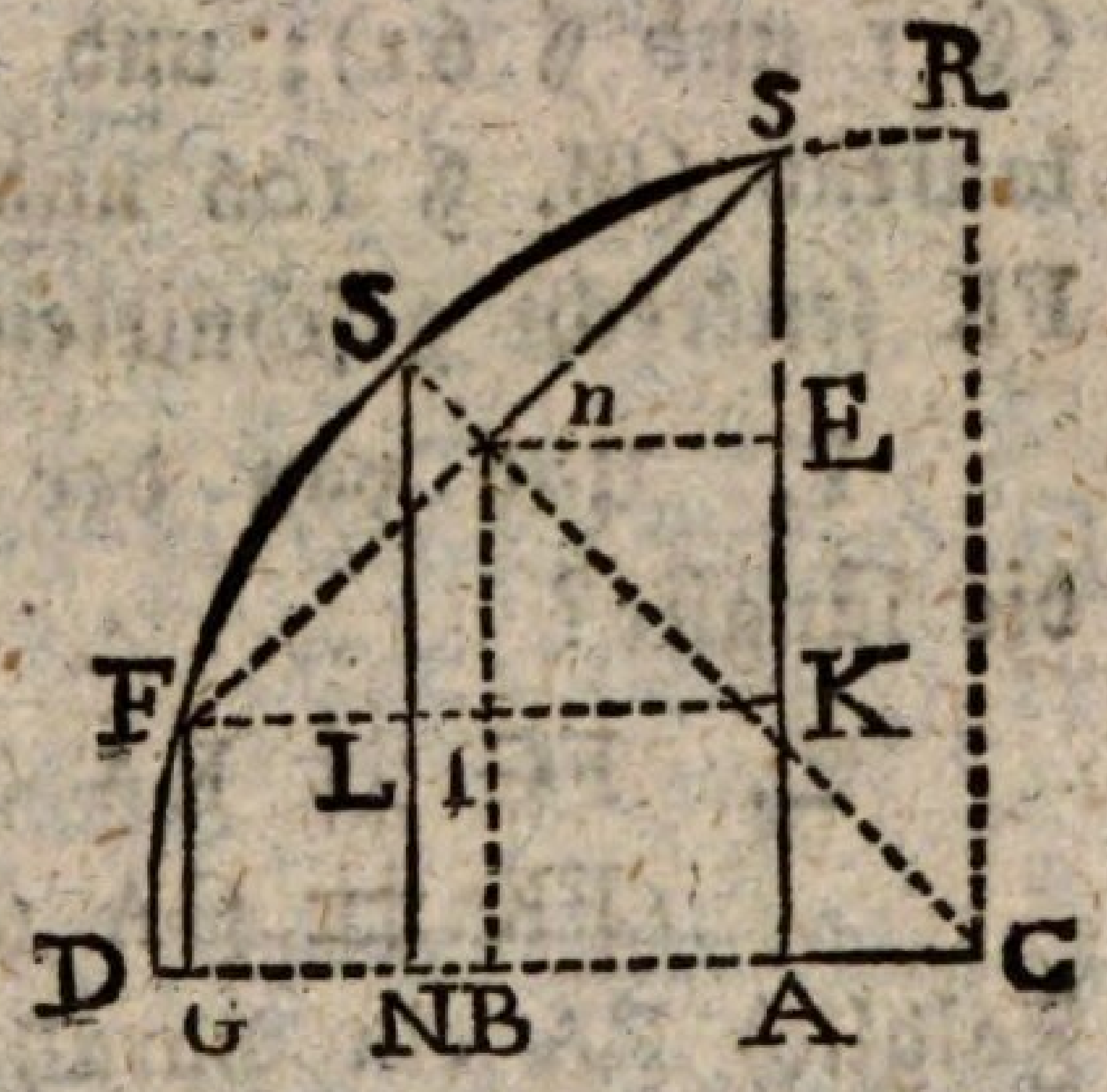
*) Wo es nicht ausdrücklich anders bestimmt wird, ist immer $r = 1$ zu nehmen.

$= 0{,}61237236 + 0{,}35355335$
$= 0{,}96592571.$

L. Und nun können wir unsre Tafel (§ 51) mit einem neuen Sinus, den von 75 Grad, und dem ihm gleichen Cosinus von 15 Grad, bereichern.

§ 62.

Sechster Satz.



L. In der vorigen Zeichnung wird sn verlängert bis sie den Umfang zum zweiten Mal schneidet in F. — Was für eine Linie ist nun sF?

S. Eine Sehne.

L. Wie wird sie durch den Halbmesser CS geschnitten?

S. Senkrecht (§ 1).

L. Und wie wird sie durch ihn geteilt?

S. In zwei gleiche Teile:
ns = nF (G. § 177).

L. Und der Bogen sF, wie wird der geteilt?

S. Eben so: sS = FS (G. § 208).

L. Es sei (wie § 61):

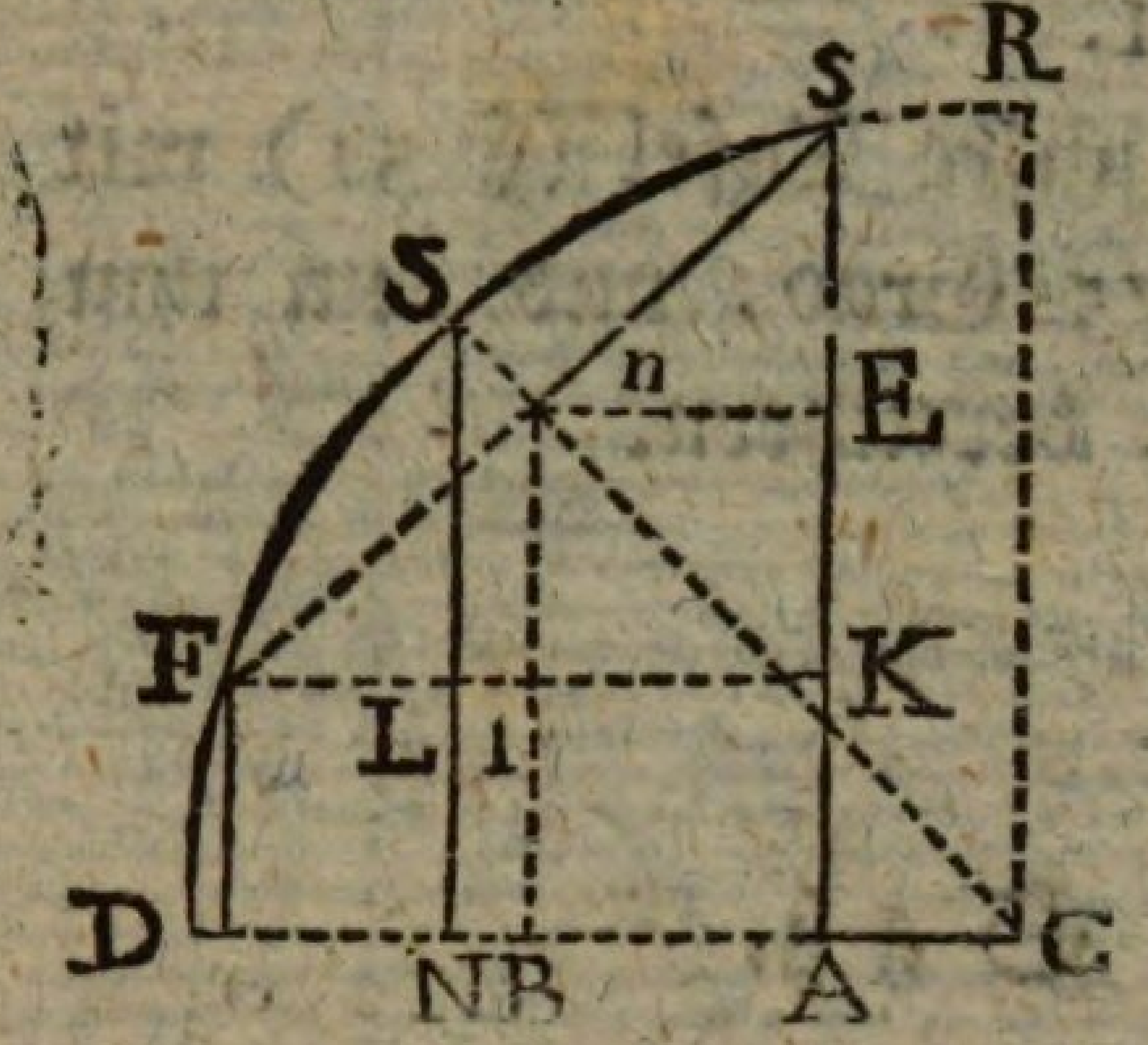
$$\begin{aligned} DS &= x \\ sS = FS &= y \end{aligned}$$

$$DF = DS - FS = x - y$$

$$FG = \text{Sin.}\ (x - y)$$

SN und sn, die Sinusse zweier Bögen x und y werden gegeben (wie § 61): gesucht aber wird jetzt der Sinus ihres Unterschiedes. — Welcher ist der?

S. Sin. (x — y) = Sin. DF = FG.



L. Nun für diesen eine Formel zu finden, wollen wir von F auf sA eine senkrechte Linie FK ziehn. — Wie schneidet diese die Linien FG, SN und nB?

S. FG, SN, nB und sA stehn alle senkrecht auf CD (§ 1 und § 61); und sind daher alle einander gleichlaufend (G. § 106 und 116), und werden alle von FK senkrecht geschnitten (G. § 115).

L. Und von der Linie FG und FK, welche ist die längste?

S. FG # KA (Bew.)
FK # GA (G. § 106).
Folglich FA ein Parallelogramm (G. § 129)
Folglich FG = KA (G. § 130).

L. Haben wir also eine Formel für KA, so haben wir auch eine für FG. Aus vorigem Satze sind sE und EA schon bekant, und wir wollen sie daher mit einem Kreuze bezeichnen. — Welches ist die Formel für EA?

S. EA = EK + KA = (Sin. x × Cos. y) : r (G. § 61).

L. KA = (Sin. x × Cos. y) : r — EK (G. § 37)
Hätten wir jetzt nun einen Ausdrukk für EK?

S. EK = nI = sE = (Cos. x × Sin. y) : r (§ 61).

L. Und der Beweis?

S. EF ist ein Parallelogramm nach der Verfertigung und G. § 106 und 129. Folglich
EK = nI (G. § 130).

L. Bis dahin richtig! Wie wird aber die Gleichheit von sE und NI bewiesen?

S. Das soll durch Hülfe der Dreiekke snE und nFI geschehn.

sn = nF (Bew.)

$\angle$ n = nFI (S. 113)

$\angle$ sEn = $\angle$ nIF (S. § 49).

$\triangle$ snE $\cong$ $\triangle$ nFI (S. § 95)

sE = nI (S. § 24) = EK (Bew.).

L. Nun sind wir ins Reine.

S. FG = KA = EA — EK

= Sinus (x — y)

=[(Sin.x×Cos.y):r]—[(Cos.x×Sin.y):r]

=[(Sin.x×Cos.y) — (Cos.x×Sin.y)]:r

L. Mit Worten ausgedrükkt!

S. Von dem Producte aus des grössern Bogens Sinus und des kleinern Cosinus, wird abgezogen das aus des grössern Cosinus, und des kleinern Sinus; und der Unterschied wird durch den Halbmesser dividirt.

L. Es sei x = 45°

y = 30°

r = 1

wie wird nun Sin. 15° gefunden?

S. Sin. 15° = Sin. (45° — 30°)

=(Sin.45°×Cos.30°)—(Cos.45°×Sin.30°)

=(Sin.45°×Sin.60°)—(Sin.45°×Sin.30°)

$= (\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - (\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2})$ (§ 51)

$= \sqrt{6} : 4 - \sqrt{2} : 4$

$= (\sqrt{6} - \sqrt{2}) : 4$

= (2,44948974 — 1,41421356) : 4

= 1,03527618 : 4

= 0,258819045.

L. Eben dieses nach Kästners Art! (§ 61)

S. $(\sqrt{6}-\sqrt{2}):4 = \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}-1)}{4}$

$= (1{,}41421356 \times 0{,}73205080):4$

$= 1{,}035275069 : 4$

$= 0{,}258818767$ „ „

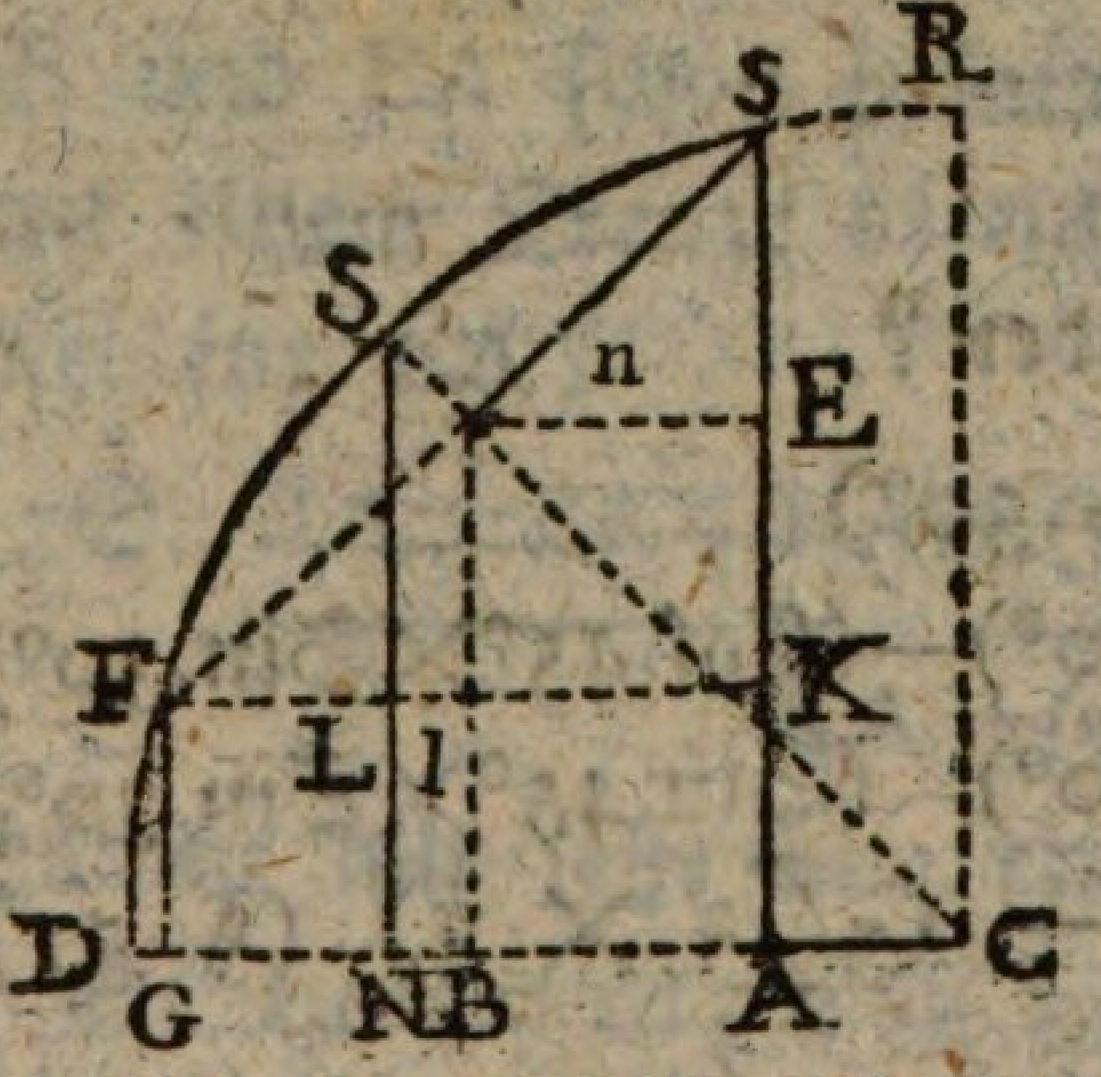
L. Es läßt sich noch auf mehrerlei Art berechnen, unter andern nach § 7.

§. 63.

Siebenter Satz.

L. Es werden gegeben SN und sn, die Sinusse zweier Bögen x und y: es wird gesucht der Cosinus (x + y) oder der Sinus dieser Bögen. Welcher ist der in der Zeichnung?

S. $\frac{\text{Sin.}\,(x+y) = sA}{\text{Cos.}\,(x+y) = CA}$ (§ 15).



L. Für CA also suchen wir eine Formel.

CA = CB — AB

Kennten wir also CB und AB, so wäre uns auch AC bekant. Wir wollen sehen, ob wir keine Formeln dafür finden können. Wir müssen damit anfangen, alle berechnete Linien auszuzeichnen. Welches sind die?

S. SN = Sin. x, und sn = Sin. y = Fn
CN = Cos. x, und Cn = Cos. y } (§ 61)
nB = EA

EK = nI = sE (§ 62)
FG = KA = IB = LN (§ 62)
CD = CR = CS = r.

L. Nun wollen wir für BC, und dan für BA Formeln suchen.

S. Das wird mittels der Dreiekke SNC und nBC geschehen können.

nB # SN (G. § 106)
CS .. CN = Cn .. CB (G. § 246)
Oder: r .. Cos. x = Cos. y .. CB
CB = (Cos. x × Cos. y) : r (A. § 294).

L. Da eigentlich die Sinusse, und nicht die Cosinusse gegeben sind, so müssen wir die Formel danach umändern.

S. CB = $\sqrt{}$ [rr — (Sin. x)^2] × $\sqrt{}$ [rr — Sin. y)^2] (§ 51)

L. Nun fehlt uns noch eine Formel für AB.

S. Für AB weis ich keine zu finden.

L. Wir müssen zuerst untersuchen, welche Linien AB gleich sind.

S. AB = KI = En = IF = BG (G. § 130 u. 24).

L. Und nun welche Dreiekke einander ähnlich sind.

S. △ sEn ∾ △ CBN (§ 61) ∾ CNS (Bew.)

L. Nun sind wir auf der Spur, denn ähnliche Dreiekke haben proportionirte Seiten. Wir müssen diese Seiten nur, zu unserm Zwekke, ändern.

S. CS .. SN = sn .. nE (G. § 258)
r .. Sin. x = Sin. y .. nE
nE = AB = (Sin. x × Sin y) : r (A. § 294)

CA = CB — AB = Cosin (x + y)
= (Cos. x × Cos. y) : r — (Sin. x × Sin. y) : r
= [(Cos. x × Cos. y) — (Sin. x × Sin. y)] : r

L. Es sei $x = 45^\circ$

$y = 30^\circ$:

welches ist Cosinus $(45^\circ + 30^\circ)$ = Cosin. 75°?

S. $\text{Cos}.75^\circ = (\text{Cos}.45^\circ \times \text{Cos}.30^\circ) - (\text{Sin}.45^\circ \times \text{Sin}.30^\circ)$

$= (\text{Sin}.45^\circ \times \text{Sin}.60^\circ) - (\text{Sin}.45^\circ \times \text{Sin}.30^\circ)$

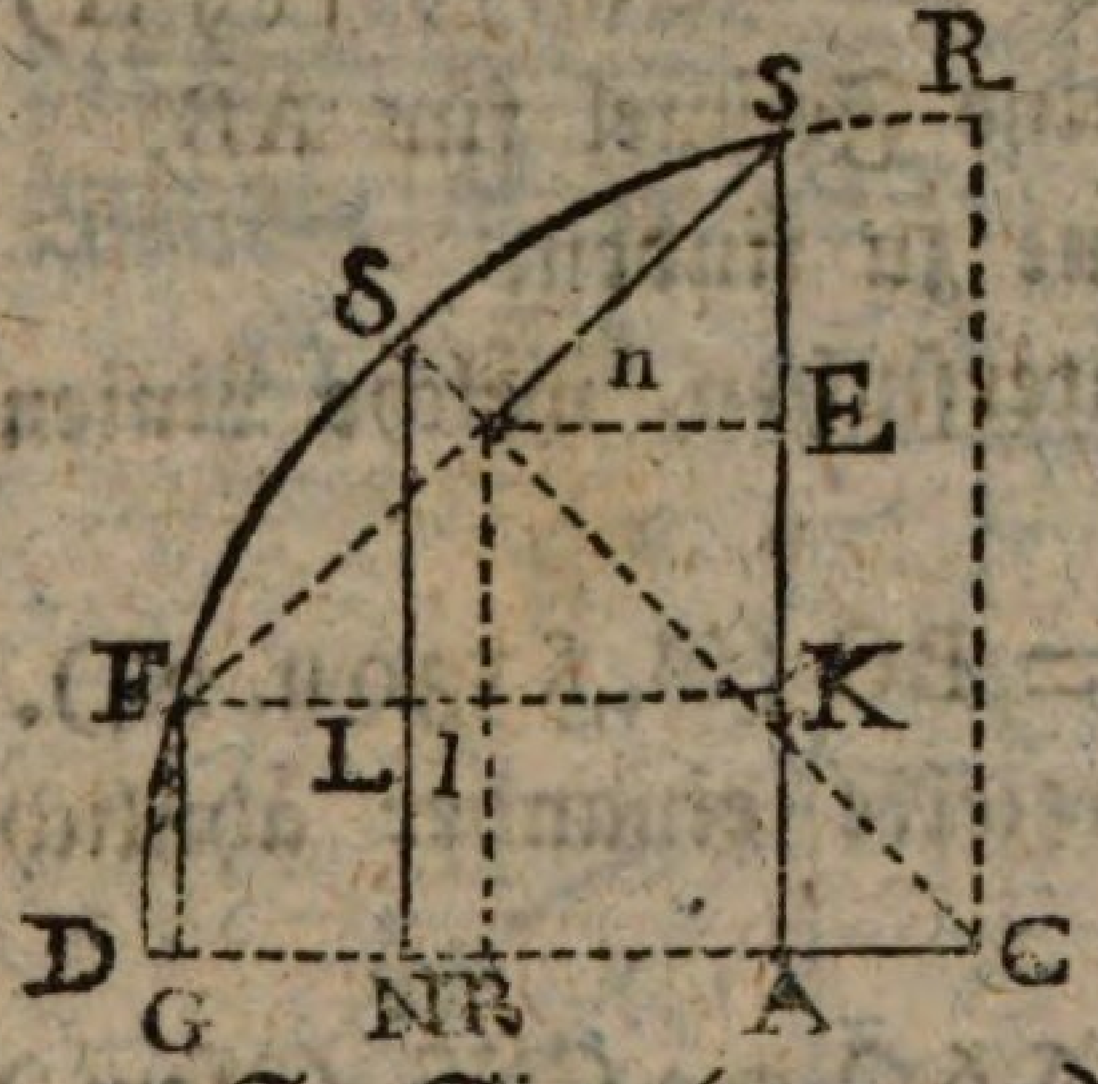
$= (\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}) - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2})$

L. Es ist unnötig weiter zu rechnen, weil die Rechnnug mit der § 62 überein trift. Woher kömt das, da wir dort einen Sinus, und hier einen Cosinus suchen?

S. Cosinus 75° = Sinus 15° (§ 17).

§. 64.

Achter Satz.



L. Es werden gegeben SN und sn, die Sinusse zweier Bögen x und y, wie vorhin § 63): es wird gesucht der Cosinus ihres Unterschiedes. — Welches ist der in der Zeichnung?

S. Sin. $(x - y)$ = FG

Cos. $(x - y)$ = GC = CA + AB + BG

L. Ein Par dieser Stükke sind schon aus den vorigen Aufgaben bekant.

S. CA = (Cos.x × Cos.y) : r − (Sin.x × Sin.y) : r
AB = + (Sin.x × Sin.y) : r } (§ 63)

CA + AB = (Cos. x × Cos. y) : r

L. CA + AB = CB lässt sich noch auf andre Art (aus § 61) finden.

S. CS .. CN = Cn .. CB

r .. Cos. x = Cos. y .. CB

CB = (Cos. x × Cos. y) : r (A. § 294).

L. Nun fehlt noch BG.

S. Auch dazu wird Rat werden.

BG = IF (G. § 130) = En (G. § 24) = AB (G. § 130)

BG = AB (G. § 32) = (Sin. x × Sin. y) : r

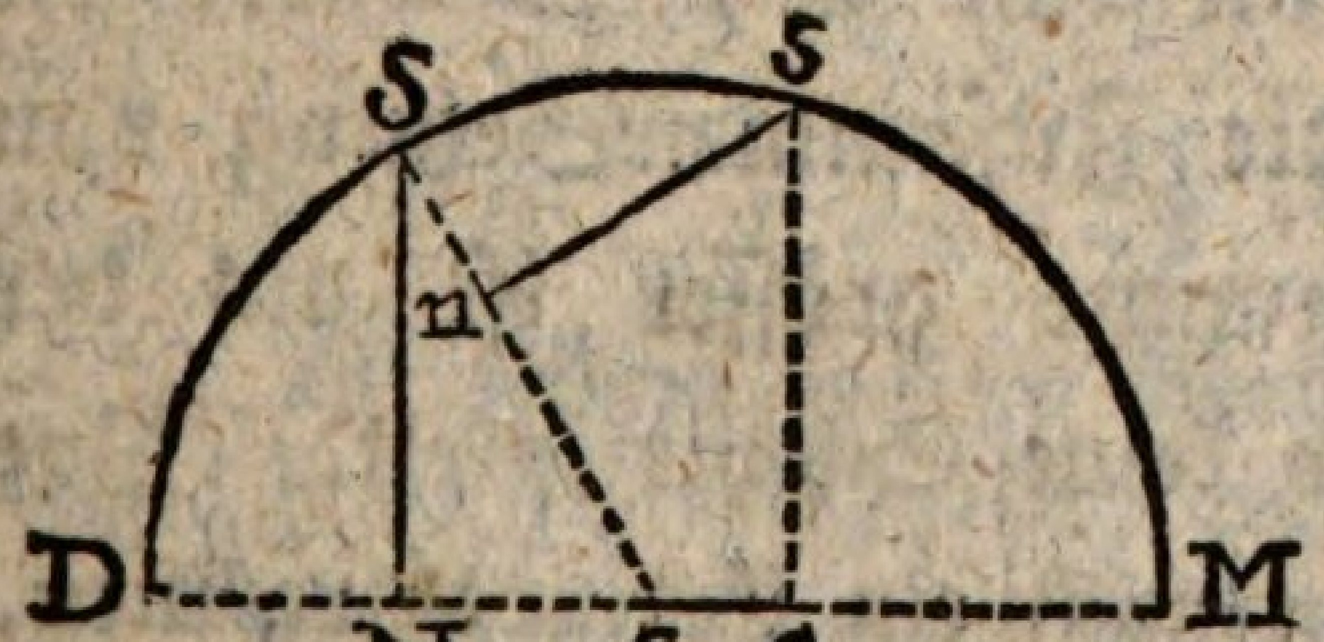
GC = BC + AB = [(Cos. x × Cos. y) + (Sin. x × Sin. y)] : r
= Cosinus (x — y).

L. Es wird gegeben Sinus 45°
und Sinus 30°
welches ist Cosinus (45° — 30°) = Cosinus 15°.

S. Cos. 15° = (Cos. 45° × Cos. 30°) + (Sin. 45° × Sin. 30°)
= (Sin. 45° × Sin. 60°) × (Sin. 45° × Sin. 30°
u. s. w., wie § 62;
weil Cosin. 15° = Sin. 75° (§ 17)

§ 65.

Neunter Satz.

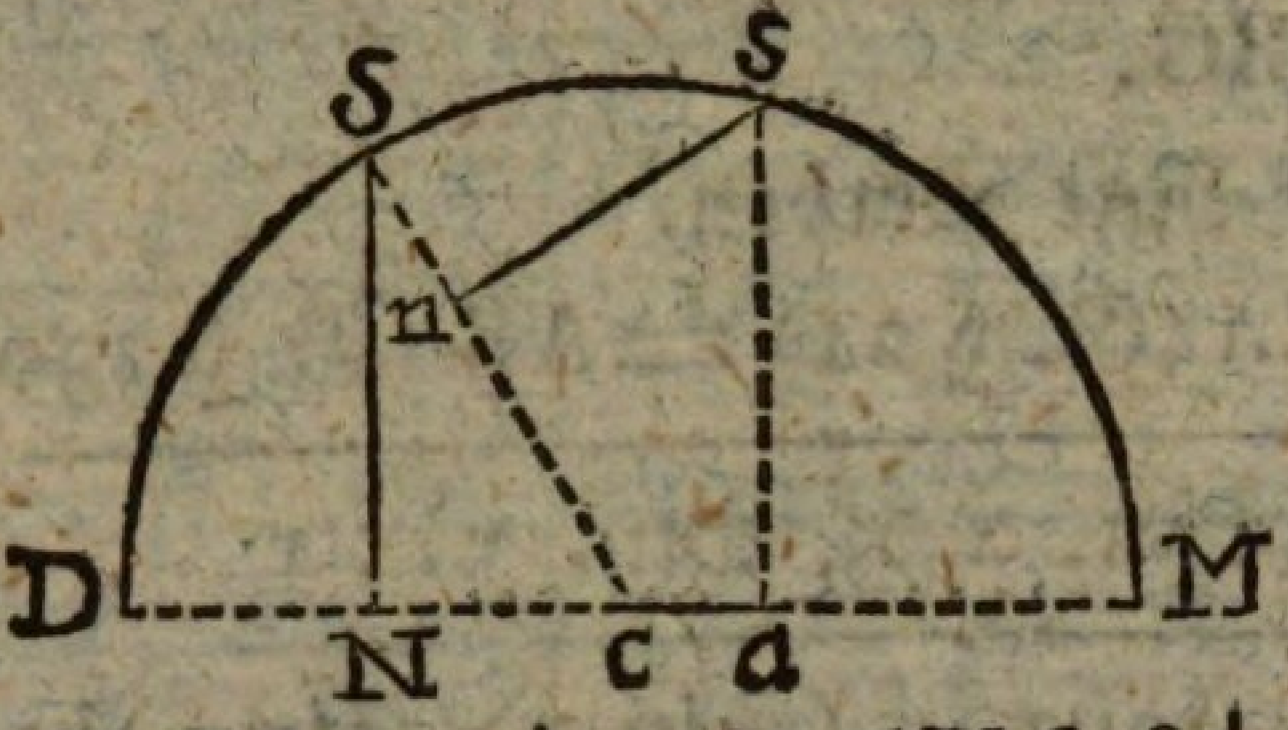


L. Bisher haben wir Linien zusammen gesetzt, deren BogenSumme geringer war als 90 Grad: nun wollen wir auch welche zusammen setzen, deren BogenSumme größer ist als der Viertel-Umfang. — Um die Sache dem Auge anschaulich, und dadurch verständlicher zu machen, wollen wir einen HalbKreis DRM zeichnen, und in demselben zwei Bögen DS und Ss abstecken; nämlich

DS = x = 60°

Ss = y = 45°.

Hierauf SN = Sinus x = Sin. 60° = $\sqrt{3} : 2$
sn = Sinus y = Sin. 45° = $\sqrt{2} : 2$
sa = Sinus (x + y) = Sin. 105°



gezogen. Sinus x und Sinus y werden gegeben; gesucht wird Cosinus (60° + 45°) = Cosinus 105° = Ca.

S. Cſ.(60°+45° = (Cſ.60° + Cſ.45°) — (Sin.60 × Sin.45°)
= (Sin.30° × Sin.45°) — (Sin.60 × Sin.45°)
(§ 63)
= $(\frac{1}{2} \times \sqrt{2} : 2) - (\sqrt{3} : 2 \times \sqrt{2} : 2)$
= $\sqrt{2} : 4 \quad - \quad \sqrt{6} : 4$
= $(\sqrt{2} - \sqrt{6}) : 4$
= (1,4142135 — 2,4494897) : 4
= — 1,0352762 : 4
= — 0,2588190
= Coſ. 105° = — Coſ. 75° (§ 20. 62)
= — Sin. 15° (§ 17. 18. 62).

L. Wäre es nicht aus § 18 bekant, daß der Cosinus von 105 Grad verneint iſt, ſo würde die Rechnung es lehren: Die ZuſammenSetzung von Linien, deren BogenSumme gröſſer iſt als der MittelUmfang, hat alſo keine Schwierigkeit. Zur Uebung wollen wir indeſſen noch ein Exempel rechnen. Es ſind bekant die Sinuſſe von 45 und 120 Grad. Welches ſind die?

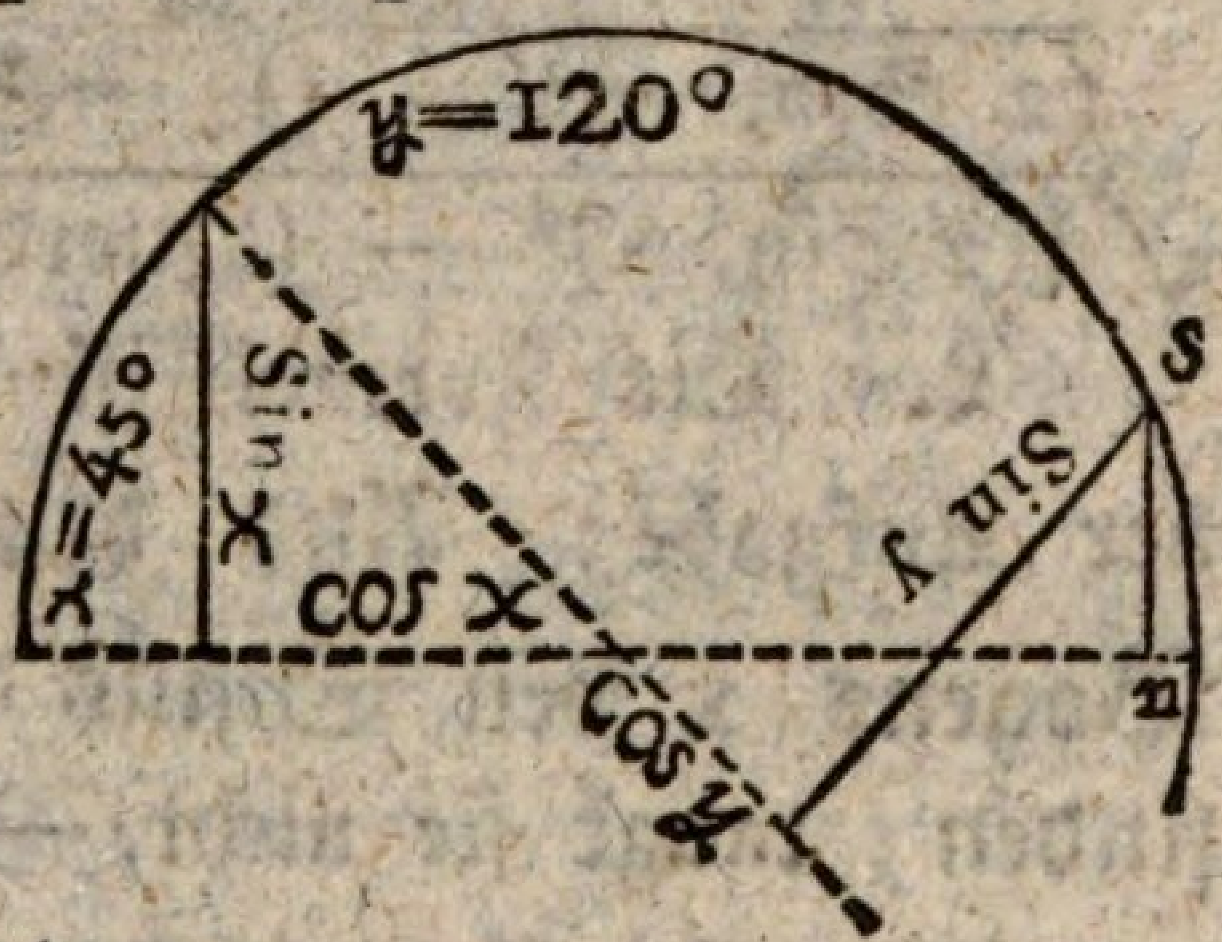
S. Sin. 45° = $\sqrt{2} : 2$ (§ 51)
Sin. 120° = Sin. 30° (§ 11) = $\frac{1}{2}$ (§ 51).

L. Es wird geſucht Sin. (45° + 120° = Sin. 165°. — Wir wollen ſehn, ob wir ihn ohne Zeichnung finden können.

$$\text{S.S.}(45^\circ + 120^\circ) = (\text{S.}45^\circ \times \text{Cs.}120^\circ) + (\text{Cs.}45^\circ \times \text{S.}120^\circ)$$
(§ 61)
$$= \text{Sin.}\,45^\circ \times -\text{Sin.}\,30^\circ + (\text{Sin.}\,45^\circ \times \text{Sin.}\,60^\circ)$$
(§ 18)
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times -\tfrac{1}{2}) + (\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2})$$
$$= -\sqrt{2} : 4 \quad + \quad \sqrt{6} : 4$$
$$= (-\sqrt{2} \quad + \quad \sqrt{6}) : 4$$
$$= \text{Sin.}\ 15^\circ\ (\S\ 62)\ \text{Sin.}\ 165^\circ\ (\S\ 11).$$

§ 66.

Anstat $(\frac{\sqrt{2}}{2} \times -\frac{1}{2}) + (\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{Sin.}\ 15^\circ$
haben Kästner (Saz 19, Z. 2, A.) und Lorenz (§ 36)
$$(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{1}}{2}) + (\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}) = \text{Sin.}\ 15^\circ.$$



Der Irtum ist um so täuschender, da 90 + 75 = 165. Entwirft man eine Zeichnung, so fält es in die Augen, daß Sinus (45° + 120°) = sn nicht Sinus 75° seyn kan. Die Zeichnungen können also auch zu Verhütung und Entdekkung von Irtümern dienen.

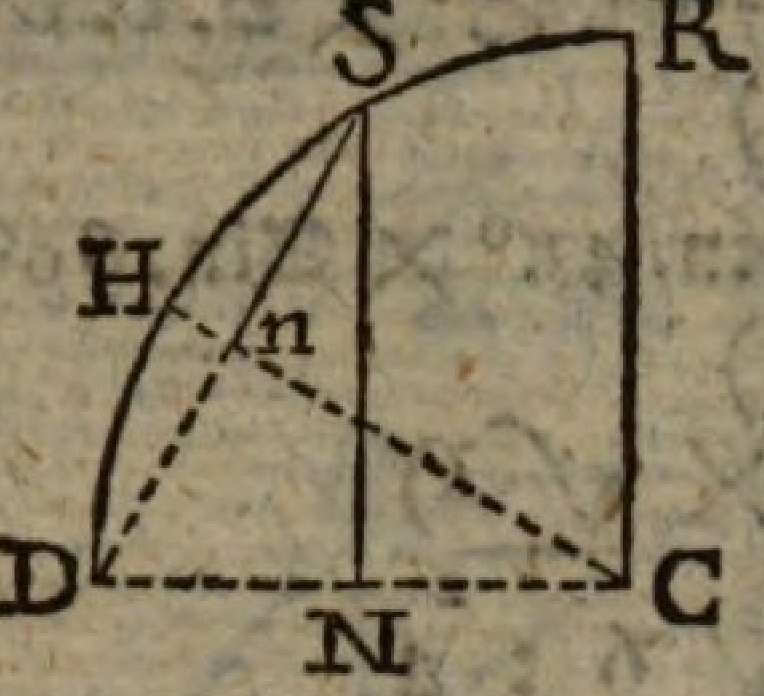
§ 67.

Auf Bögen von 90 Grad, und drüber, passt der Beweis § 61 eigentlich nicht, und man pflegt sich, anstat dessen, zu begnügen, daß man das verlangte Resultat (in dem lezten Exempel für den Sinus von 165 den von 15 Grad) erhält: welches nicht sehr geometrisch ist.

§ 68.

Zehnter Saz.

L. In einem ViertelKreise DCR werden zwei Bögen, DH, HS, von gleicher Grösse abgestekkt,



welche beide x heissen sollen. Hierauf wird SnD, die Sehne des Bogens DHS = 2x, gezogen. -- Welches ist des einzelnen Bogens x Sinus?

S. Sin. x = Dn = Sn (G. § 177).

L. Und Sinus 2x?

S. Sinus 2x = SN (§ 1).

L. Ist Sn = Sinus x bekant, so ist es auch SD = 2Sn = 2 Sinus x. Wir wird nun SN = Sinus 2z gefunden?

S. $SD^2 = SN^2 + DN^2$ (G. § 160)

$SD^2 - DN^2 = SN^2$ (G. § 37)

$(2\ \text{Sin. } x)^2 - (\text{QuerSin. } 2x)^2 = (\text{Sin. } 2x)^2$

$\sqrt{[(2\ \text{Sin. } x)^2 - (\text{QuerSin } 2x)^2]} = \text{Sin. } 2x.$

L. Die Formel ist richtig, aber zur Auflösung der Aufgabe: Aus dem gegebenen Sinus eines Bogens x den Sinus des doppelten Bogens zu finden, taugt sie nicht. — Welches ist ihr Fehler?

S. Es kömmt QuerSinus 2x darin vor, welcher nicht gegeben ist.

L Auch nicht gefunden werden kan, bis Sinus 2x es ist. Wolte man auch QuerSinus 2 x in r — Cosinus 2x (§ 51) verwandeln; so wäre dabei nichts gewonnen, weil auch Cosinus 2x die Bekantschaft von Sinus 2x voraussetzt. Man könte auch noch die in der Tafel (§51) für Sinus x gehaltenen drei Formeln in Formeln für Sinus 2x umwandeln: z. B.

$\text{Sin. } x = \sqrt{[rr - (\text{Cos. } x)^2]}$

$\text{Sin. } 2x = \sqrt{[rr - (\text{Cos. } 2x)^2]}$ (§ 53)

u. s. w.

aber sie haben sämtlich den schon gerügten Fehler.

$$\text{Sin.}(x+y) = [(\text{Sin.}\,x \times \text{Cos.}\,y) + (\text{Cos.}\,x \times \text{Sin.}\,y)] : r$$
(§. 61).

Solte diese Formel uns nicht zu Ausfindung einer bequemen für Sinus 2x behülflich seyn können?

S. Ja, ich darf nur $x = y$ annehmen; so ist

$$\text{Sin.}\,2x = \text{Sin.}\,(x + x) = (\text{Sin.}\,x + y)$$
$$= [(\text{Sin.}\,x \times \text{Cos.}\,x) + (\text{Cos.}\,x \times \text{Sin.}\,x)] : r$$
$$= 2\,(\text{Sin.}\,x \times \text{Cos.}\,x) : r$$

L. Nun zur Anwendung!

Es sei $x = 15^\circ$

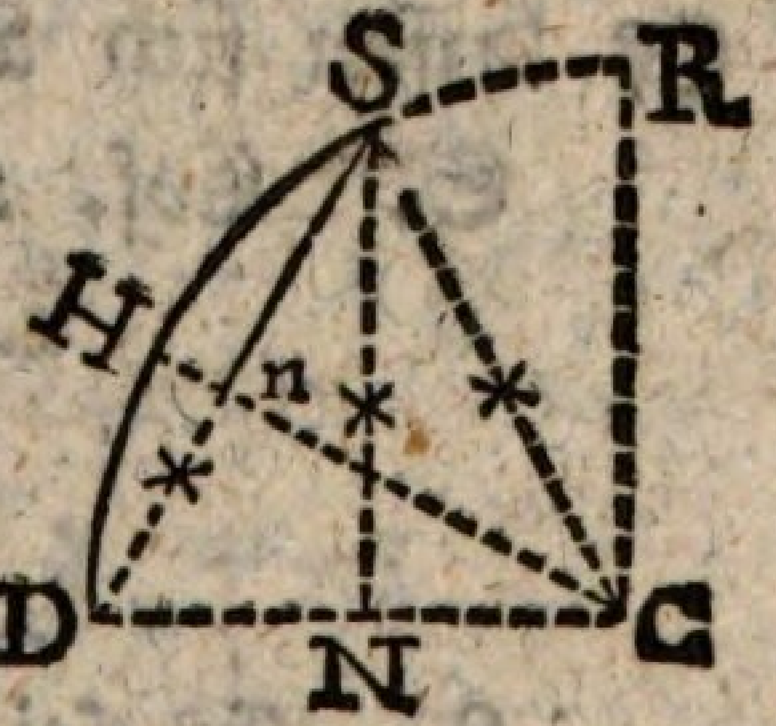
$$\text{Sin.}\,x = \text{Sin.}\,15^\circ = 2\,(\sqrt{6} - \sqrt{2}) : 4\ (\S\ 62)$$

wie groß ist der Sinus von 30 Grad?

S. $\text{Sin.}\,2x = \text{Sin.}\,30^\circ$
$$= 2\ \text{Sin.}\,15^\circ \times \text{Cos.}\,15^\circ$$
$$= 2\ \text{Sin.}\,15^\circ \times \text{Sin.}\,75^\circ\ (\S\,17)$$
$$= 2\,\frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4} \times \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4}$$
$$= 2 \times \tfrac{4}{16} = \tfrac{1}{2}\ (\S\ 51)$$

§ 69.

Elfter Satz.



L. In der vorigen Zeichnung wird wieder Sinus x bekant angenommen, anstat Sinus 2x aber wird jezt Cosinus 2x = NC gesucht. — Wie wird der gefunden?

S. Zuerst suche ich SN = Sinus 2x (§ 68), dan ziehe ich CS, so ist:

$$NC^2 + SN^2 = SC^2\ (\text{G.}\ \S\ 160)$$
$$NC^2 = SC^2 - SN^2\ (\text{G.}\ \S\ 37)$$
$$NC = \sqrt{(SC^2 - SN^2)}$$
$$\text{Cos.}\,2x = \sqrt{[(rr - (\text{Sin.}\,2x)^2]}$$

L. Die Aufgabe lautet = = ?

S. Aus dem Sinus eines Bogens x den Cosinus des doppelten Bogens zu finden.

L. Das war durch Hülfe der Zeichnung; nun müssen wir die Aufgabe auch durch Rechnung auflösen. — Zuerst Mittels der Tafel § 51.

S. $\text{Cos. } x = \sqrt{[rr - (\text{Sin. } x)^2]}$ (§ 51)

$\text{Cos. } 2x = \sqrt{[rr - (\text{Sin. } 2x)^2]}$ (§ 53)

L. Und nun auf die dritte Art, wo $x = y$ angenommen wird.

S. Ist $x = y$,

so ist $(x - y) = \text{Cos. } 2x$

$= [(\text{Cos. } x \times \text{Cos. } x) - (\text{Sin. } x \times \text{Sin. } x)] : r$ (§ 63)

$= [(\text{Cosin. } x)^2 - (\text{Sin. } x)^2] : r$

L. $(\text{Cosin. } x)^2 = rr - (\text{Sin. } x)^2$ (§ 50)

Hiernach wollen wir die Formel umändern.

S. $\text{Cos. } 2x = [rr - (\text{Sin. } x)^2 - (\text{Sin. } x)^2] : r$

$= [rr - 2 (\text{Sin. } x)^2] : r$

L. $(\text{Sin. } x)^2 = rr - (\text{Cosin. } x)^2$ (§ 50).

Es lassen sich also noch Aenderungen anbringen.

S. $\text{Cos. } 2x = (rr - [2\,rr - 2 (\text{Cos. } x)^2]) : r$

$= [- rr + 2 (\text{Cos. } x)^2] : r$

$= [2 (\text{Cos. } x)^2 - rr] : r$

$= 2 (\text{Cos. } x)^2 : r - r$

L. Es sei $r = 1$, so sind die vier Formeln = = ?

S. $\text{Cos. } 2x = \sqrt{[1 - (\text{Sin. } 2x)^2]}$

$= (\text{Cos. } x)^2 - (\text{Sin. } x)^2$

$= 1 - 2 (\text{Sin. } x)^2$

$= 2 (\text{Cos. } x)^2 - 1$

L. Die erste Formel ist des WurzelZeichens we=

gen etwas unbequem. Wir wollen uns daher nur der drei lezten bedienen. Es wird gegeben

Sinus $15^\circ = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) : 4$ (§ 62)

man verlangte = Cosinus 30°.

S. Cos. $30^\circ = (\text{Cos. } 15^\circ)^2 - (\text{Sin. } 15^\circ)^2$

$= [(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 - (\sqrt{6}-\sqrt{2})^2] : 4$

$= [(8 + 4\sqrt{3}) - (8 - 4\sqrt{3})] : 16$

$= [(1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}) - (1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3})] : 2$

$= \sqrt{3} : 2$

$= 1{,}73205080 : 2$

$= 0{,}86602540 =$ Sin. 60 (§ 51).

L. Nun nach der dritten Formel!

S. Cos. $30^\circ = 1 - 2\,(\text{Sin. } 15^\circ)^2$

$= 1 - 2\,\dfrac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{4}$

$= 1 - 2\,(8 - 4\sqrt{3}) : 16$

$= 1 - \quad (8 - 4\sqrt{3}) : 8$

$= 1 - \quad (1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3})$

$= \sqrt{3} : 2$, wie vorhin.

L. Und nun nach der vierten!

S. Cos. $30^\circ = 2\;(\text{Cos. } 15^\circ)^2 - 1$

$= 2\,\dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{4} - 1$

$= 2\,\dfrac{(8 + 4\sqrt{3})}{16} - 1$

$= \dfrac{8 + 4\sqrt{3}}{8} - 1$

$= \quad 1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - 1$

$= \quad \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3} : 2.$

§ 70.

Zwölfter Saz.

L. Aus dem Sinus des einfachen Bogens lässt sich nicht bloß Sinus und Cosinus des doppelten, sondern des mehrfachen finden. — Wir wollen einmal Sinus 3x suchen. Das Verfahren § 68 kan uns auf die Spur leiten.

S. Ich nehme y = 2x an, so ist

Sin. (x + y) = Sin. 3x

= [(Sin. x × Cos. y) — (Cos. x × Sin. y)] : r (§ 62)

= [(Sin. x × Cos. 2y) — (Cos. x × Sin. 2y)) : r

L. Man muß immer auf Abkürzung der Formeln, zumal der etwas langen, bedacht seyn. Wir wollen für Cosinus 2x und Sinus 2x einmal andre Ausdrükke setzen.

$$\text{Cos. } 2x = [(\text{Cos. } x)^2 - (\text{Sin. } x)^2] : r \ (\S\ 69)$$

$$\text{Sin. } 2x = 2 \text{ Sin. } x \times \text{Cos. } x : r \ (\S\ 68)$$

S. Sin. (x + y)

$$= [\text{Sin. } x \times \frac{(\text{Cs. } x)^2 - (\text{Sin. } x)^2}{r} + \text{Cs. } x \times \frac{2 \text{Sin. } x \times \text{Cs. } x}{r}] : r$$

$$= [(\text{Cos. } x)^2 \times \text{Sin. } x - (\text{Sin. } x)^3 + (\text{Cos. } x)^2 \times 2 \text{Sin. } x] : rr$$

L. Nun wollen wir auch für (Cosinus x)² einen andern Ausdrukk setzen:

$$(\text{Cos. } x)^2 = rr - (\text{Sin. } x)^2 \ (\S\ 19).$$

S. Sin. (x + y)

$$= [(rr - (\text{S. } x)^2] \times \text{S. } x - (\text{S. } x)^3 + [rr - (\text{S. } x)^2] \times 2 \text{S. } x) : rr$$

$$= [rr \text{S. } x - (\text{S. } x)^3 - (\text{S. } x)^3 + 2\, rr \text{S. } x - 2 (\text{Sin. } x)^3] : rr$$

$$= [3\, rr \text{ Sin. } x - 4 (\text{Sin. } x)^3] : rr$$

$$= 3 \text{ Sin. } x - 4 (\text{Sin } x)^3 : rr$$

L. Wir haben also unsern Zwekk erreicht: die lezte Formel ist kurz und bequem. Wir wollen, wie vorhin (§ 69)

$x = 15°$.

Sin. x = Sin. $15° = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) : 4$ als bekant annehmen, und daraus Sin. $3x$ = Sin. $45°$ suchen, und zwar, wie gewöhnlich, für den Halbmesser 1.

S. Sin. $45° = 3$ Sin. $15° - 4$ (Sin. $15°)^3$

$$= 3\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)(\S\,62) - 4\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2})^3}{4}\right.$$

$$= (3\sqrt{6}-3\sqrt{2}):4 - 4\left(\frac{12\sqrt{6}-20\sqrt{3}}{4\times 4}\right):64$$

$$= (3\sqrt{6}-3\sqrt{2}):4 - (12\sqrt{6}-20\sqrt{3}):16$$

$$= (3\,\frac{\sqrt{6}}{4} - 3\,\frac{\sqrt{2}}{4} - (3\,\frac{\sqrt{6}}{4} - 5\,\frac{\sqrt{3}}{4})$$

$$= \qquad 2\frac{\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2} : 2\ (\S\ 51).$$

L. Nun auch eine Formel für Cosinus $3x$!

S. Cos. $(x + y)$ = Cos. $3x$

$$= [(\text{Cos.}\,x \times \text{Cos.}\,y) - (\text{Sin.}\,x \times \text{Sin.}\,y)] : r\ (\S\ 63)$$

$$= \text{Cos.}\,x \times \text{Cos.}\,2x - (\text{Sin.}\,x \times \text{Sin}\,2x) : r$$

$$= [\text{Cos.}\,x \times \frac{(\text{C.}\,x)^2 - (\text{S.}\,x)^2}{r} - \text{S.}\,x \times \frac{2\,\text{S.}\,x \times \text{C.}\,x}{r}] : r$$

$$= [(\text{Cos.}\,x)^3 - (\text{S.}\,x)^2 \times \text{Cos.}\,x - 2\,(\text{S.}\,x)^2 \times \text{Cos.}\,x] : rr$$

$$= [(\text{Cos.}\,x)^3 - 3\,(\text{Sin.}\,x)^2 \times \text{Cos.}\,x] : rr$$

$$= [[(\text{Cos.}\,x)^3 - 3\,[r^r - (\text{Cos.}\,x)^2] \times \text{Cos.}\,x]] : rr$$

$$= [[(\text{Cos.}\,x)^3 - [3\,rr\,\text{Cos.}\,x - 3\,(\text{Cos.}\,x)^3]]] : rr$$

$$= [4\,(\text{Cos.}\,x)^3 - 3\,rr\,\text{Cos.}\,x] : rr$$

$$= 4\,(\text{Cos.}\,x)^3 : rr - 3\,\text{Cos.}\,x$$

L. Es wird gegeben Cosinus $30° = \sqrt{0{,}75}$ (§ 19): welches ist Cosinus $90°$?

S. Cos. $90° = 4$ (Cos. $30°)^3 - 3$ Cos. $30°$

$$= 4\,(\sqrt{0{,}75})^3 - 3\,\sqrt{0{,}75}$$

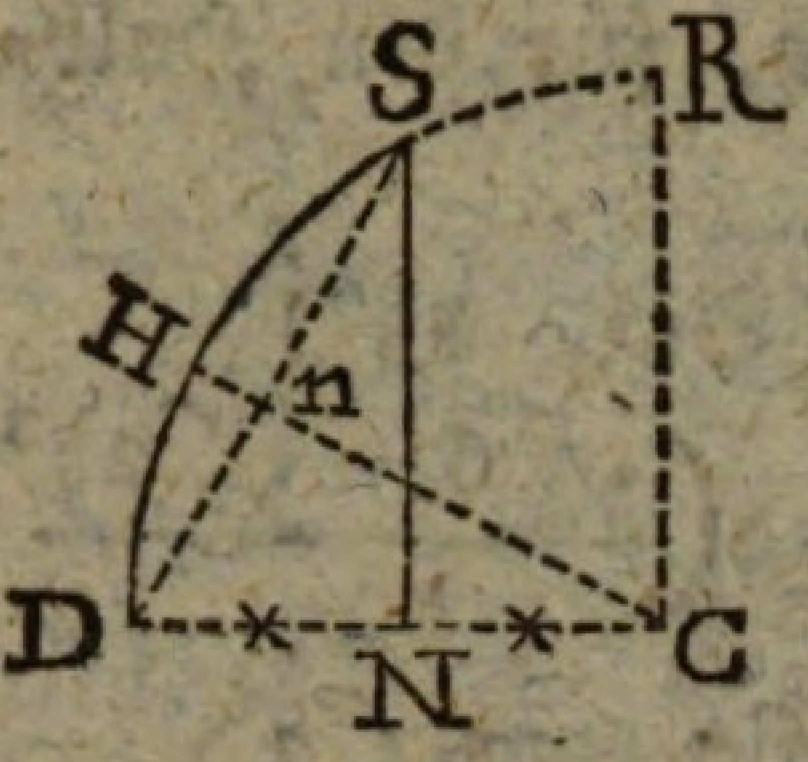
$$= 4 \times 0{,}75\,\sqrt{0{,}75} - 3\sqrt{0{,}75}$$

$$= \qquad 3\,\sqrt{0{,}75} - 3\sqrt{0{,}75}$$

$$= 0\ (\S\ 18).$$

§ 71.

Dreizehnter Saz.



L. Wie aus sn = Sinus x, SN = Sinus 2x gefunden wird, haben wir gelernt (§ 67). Jezt wollen wir es umkehren: SN = Sinus 2x bekant annehmen, und sn = Sinus x suchen.

S. $SN^2 + DN^2 = SD^2$ (G. § 160)

$\sqrt{(SN^2 + DN^2)} = SD$

$\sqrt{[(\text{Sin. } 2x)^2 + (\text{QuerSin. } 2x)^2]} = 2 \text{ Sin. } x$

$\sqrt{[(\text{Sin. } 2x)^2 + (\text{QuerSin. } 2x)^2]} : 2 = \text{Sin. } x.$

L. Sezt man $2x = z$, so ist

$\text{Sin. } \frac{z}{2} = \sqrt{[(\text{Sin. } z)^2 + \text{QuerSin. } z)^2]} : 2$ (§ 53).

Nun wissen wir also aus dem Sinus des doppelten Bogens den Sinus des einfachen, oder aus dem Sinus des ganzen Bogens, den Sinus des halben, zu finden. Nur die Formel leidet noch mancherlei Aenderungen. Wir wollen einmal für $(\text{Sinus } z)^2$ und für $(\text{QuerSinus } z)^2$ andre Ausdrükke sezen.

S. $(\text{Sin. } z)^2 = rr - (\text{Cos. } z)^2$ (§ 50. 53)

$(\text{QuerSin. } z)^2 = (r - \text{Cos. } z)^2$ (§ 51)

$\text{Sin. } z = \sqrt{[rr - (\text{Cos. } z)^2 + (r - \text{Cos. } z)^2]} : 2$

L. Nun wollen wir auch $(r - \text{Cosinus } z)^2$ gegen andre Ausdrükke vertauschen.

S. $(r - \text{Cos. } z)^2 = rr - 2r \text{ Cos. } z + (\text{Cos. } z)^2$

$\text{Sin. } z = \sqrt{[rr - (\text{Cos. } z)^2 + rr - 2r \text{ Cos. } z + (\text{Cos. } z)^2]} : 2$

$= \sqrt{[2rr \qquad - 2r \text{ Cos. } z]} : 2$

L. Diese Formel scheint bequem: da aber in andern LehrBüchern, durch Rechnung,

$$\text{Sin.}\ \tfrac{z}{2} = \sqrt{\frac{rr - r\ \text{Cos.}\ z}{2}}$$

gefunden wird, so wollen wir doch sehen, ob diese Formel aus der unsrigen herauszubringen sei.

$$\text{S.}\ \sqrt{(2rr - 2r\,\text{Cos.}z) : 2} = \frac{\sqrt{[(rr - r\,\text{Cos.}\ z)2]}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{(rr - r\text{Cos.}z)}\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \;\frac{(\text{A.}\ \S\ 184)}{(\text{A.}\ \S\ 190)}$$

$$= \frac{\sqrt{(rr - r\ \text{Cos.}\ z}}{\sqrt{2}}\ (\text{A.}\ \S\ 84)$$

$$= \sqrt{\frac{rr - r\ \text{Cos.}z}{2}}\ (\text{A.}\ \S 178)$$

L. Es sei Sinus z = Sinus 30°
welches ist Sinus $\frac{z}{2}$ = Sinus 15°?
und zwar nach der ersten Formel.

S. Sin. 15° $= \sqrt{(2 - 2\ \text{Cos.}\ 30^\circ) : 2}$
$= \sqrt{(2 - 2 \times 0{,}8660254037) : 2}$
$= \sqrt{(2 - 1{,}7320508074) : 2}$
$= \sqrt{0{,}2679491925} : 2$
$= 0{,}5176380 : 2$
$= 0{,}2588190$ (§ 62)

L. Nun auch nach der zweiten Formel!

S. Sin. 15° $= \sqrt{(1 - \text{Cos.}\ 30^\circ)} : \sqrt{2}$
$= \sqrt{(1 - 0{,}8660254037)} : \sqrt{2}$
$= \sqrt{0{,}1339745962} : \sqrt{2}$
$= \sqrt{(0{,}1339745962 : 2)}$
$= \sqrt{0{,}0669872981}$
$= 0{,}2588190$: :

L. Nun wollen wir auch noch den Sinus von 7 Grad 30 Min. suchen.

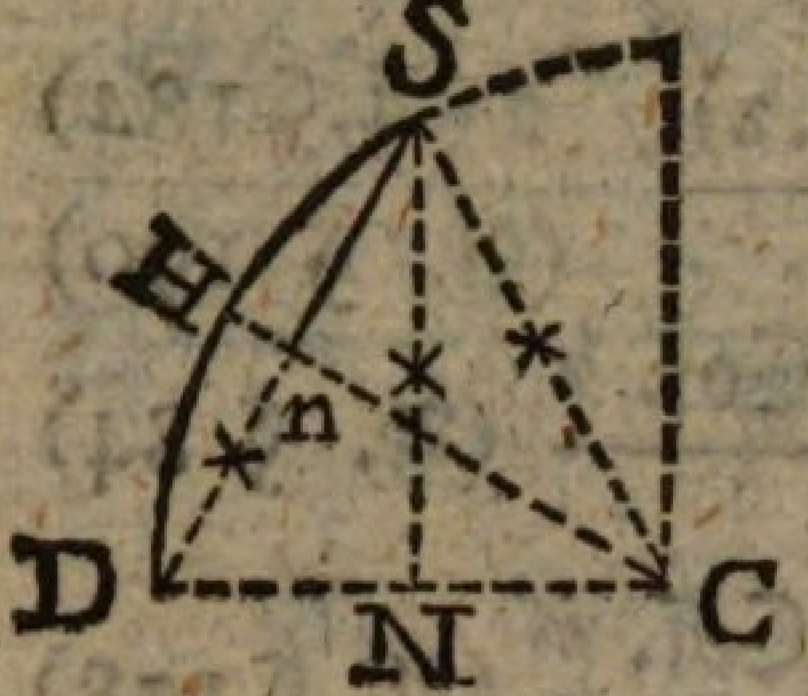
S. Sin. 7° 30′ $= \sqrt{(2 - 2\ \text{Cos.}\ 15^\circ) : 2}$
$= \sqrt{(2 - 2 \times 0{,}96592582) : 2}$
$= \sqrt{(2 - 1{,}93185164) : 2}$
$= \sqrt{(0{,}06814835)} : 2$
$= 0{,}2610524 : 2$
$= 0{,}1305262$

§ 72.

Virzehnter Saz.

L. Welches ist Cosinus $\frac{1}{2}$ DS in der Zeichnung?

S. Cosin. $\frac{1}{2}$ DS = Cosin. HS = Cn (§ 15).



L. Wie wird nun Cn gefunden, wenn SN = Sinus DS gegeben ist?

S. Zuerst suche ich Sn = Sinus HS (§ 71). Nun ist

$$Sn^2 + Cn^2 = CS^2 \quad (G. \S\ 160)$$

$$Cn^2 = CS^2 - Sn^2 \quad (G. 37)$$

$$Cn = \sqrt{(CS^2 - Sn^2)}$$

$$\text{Cosin.}\ \frac{z}{2} = \sqrt{[rr - \text{Sin.}\ \frac{z}{2})^2]}$$

L. Dieses ist eine schon bekante Formel (§ 19. 53). Eine andre entwikkelt sich aus

$$[2\ (\text{Cos.}\ x)^2 - rr] : r = \text{Cos.}\ 2x \quad (\S\ 69)$$

$$\text{S.}\ 2\ (\text{Cos.}\ x)^2 - rr = r\ \text{Cos.}\ 2x$$

$$2\ (\text{Cos.}\ x)^2 = r\ \text{Cos.}\ 2x + rr$$

$$(\text{Cos.}\ x)^2 = (r\ \text{Cos.}\ 2x + rr) : 2$$

$$\text{Cos.}\ x = \sqrt{(r\ \text{Cos.}\ 2x + rr)} : \sqrt{2}$$

$$\text{L Cos.}\ \frac{z}{2} = \sqrt{(r\ \text{Cos.}\ z + rr)} : \sqrt{2} \quad (\S\ 53)$$

Es sei z = 30°; welches ist Cosinus $\frac{z}{2}$ = Cosinus 15°, nach der ersten Formel?

$$\text{S. Cos.}\ 15^\circ = \sqrt{(1 - (\text{Sin.}\ 15^\circ)^2]}$$

$$= \sqrt{(1 - 0{,}0669872954)}$$

$$= \sqrt{0{,}93301270453}$$

$$= 0{,}9659258 \ldots$$

$$= \text{Sin.}\ 75^\circ \quad (\S\ 61).$$

L. Und nun eben dieses nach der zweiten Formel?

S. $\text{Cos. } 15^\circ = \sqrt{[(\text{Cos. } 30^\circ + 1) : 2]}$
$= \sqrt{(1{,}8660254037 : 2)}$ (§ 51)
$= \sqrt{0{,}93301270185}$
$= 0{,}9659258 \ldots$

L. Nun wollen wir $z = 15^\circ$ annehmen, und den Cosinus von $15^\circ : 2 =$ Cosinus $7^\circ\ 30'$ suchen.

S. $\text{Cos. } 7^\circ\ 30' = \sqrt{[1 - (\text{Sin. } \frac{15^\circ}{2})^2]}$
$= \sqrt{(1 - 0{,}305262^{2})}$ (§ 71)
$= \sqrt{(1 - 0{,}017037089 \ldots)}$
$= \sqrt{0{,}982962910 \ldots}$
$= 0{,}9914449$
$=$ Sinus $82^\circ\ 30'$

§ 73.

Funfzehnter Satz.

L. Die Formeln für Sinus $(x + y)$ (§ 61), und für Sinus $(x - y)$ (§ 62) werden unter einander gesetzt, und zwar, der Kürze wegen, mit Weglassung des Divisors r: und werden erst addirt, und dan subtrahirt.

S. $\text{Sin.}(x+y) = (\text{S.}x \times \text{C.}y) + (\text{C.}x \times \text{S.}y)$
$\text{Sin.}(x-y) = (\text{S.}x \times \text{C.}y) - (\text{C.}x \times \text{S.}y)$

$\text{S.}(x+y) + \text{S.}(x-y) = 2(\text{S.}x \times \text{C.}y)$
$\text{S.}(x+y) - \text{S.}(x-y) = 2(\text{C.}x \times \text{S.}y)$

L. Nun wird mit den Cosinussen $(x - y)$ (§ 63) und $(x + y)$ (§ 64) eben so verfahren.

S. $\text{Cos.}(x-y) = (\text{C.}x \times \text{C.}y) + (\text{S.}x \times \text{S.}y)$
$\text{Cos.}(x+y) = (\text{C.}x \times \text{C.}y) - (\text{S.}x \times \text{S.}y)$

$\text{C.}(x-y) + \text{C.}(x+y) = 2(\text{.}x \times \text{C.}y)$
$\text{C.}(x-y) - \text{C.}(x+y) = 2(\text{S.}x \times \text{S.}y)$

L. Dieses Verfahren heisst: Summen und Unterschiede von Sinussen, und von Cosinussen, in Producte verwandeln: und umgekehrt, Producte in Summen und Unterschiede. Ein HauptNutzen der Verwandlung in Producte besteht darin, daß sich Logarithmen dabei sehr gut anbringen lassen. Welches ist, z. B. der Logarithme von Sin. (x + y) + Sin. (x — y)?

S. $\lambda\,[\mathfrak{S}.(x+y)+\mathfrak{S}.(x-y)] = \lambda 2 + \lambda \mathfrak{S}.x + \lambda \mathfrak{C}.y$ (A. § 327).

L. Und der Logarithm Cos. (x — y) + Cos. (x + y)?

S. $\lambda\,[\mathfrak{C}.(x-y)+\mathfrak{C}.(x+y)] = \lambda 2 + \lambda \mathfrak{C}.x + \lambda \mathfrak{C}.y$

§ 74.

Sechzehnter Satz.

L. $$\frac{\mathfrak{S}.(x+y)+\mathfrak{S}.(x-y)}{\mathfrak{S}.(x+y)-\mathfrak{S}.(x-y)} = \frac{2\,\mathfrak{S}.x \times \mathfrak{C}.y)}{2\,\mathfrak{C}.x \times \mathfrak{S}.y)} \text{ (§ 73)}$$

$$= \frac{\text{Sin. } x}{\text{Cos. } x} \times \frac{\text{Cos. } y}{\text{Sin. } y} = \frac{\text{Sin. } x}{\text{Cos. } x} : \frac{\text{Sin. } y}{\text{Cos. } y} \text{ (A. § 99)}$$

$= \text{Tang. } x : \text{Tang } y$ (§ 51).

Das ist ein Quotient von SinusSummen und Sinus-Unterschieden in Tangenten verwandelt. Auf ähnliche Art lassen sich auch CosinusQuotienten in Cotangenten verwandeln.

S. $$\frac{\mathfrak{C}.(x-y)+\mathfrak{C}.(x+y)}{\mathfrak{C}.(x-y)-\mathfrak{C}.(x+y)} = \frac{2\,\mathfrak{C}.x \times \mathfrak{C}.y}{2\,\mathfrak{S}.x \times \mathfrak{S}.y} \text{ (§ 73)}$$

$= (\text{Cos. } x : \text{Sin. } x) : (\text{Sin. } y : \text{Cos. } y)$ (A. § 108)

$= \text{Cotang. } x : \text{Cotang. } y$ (§ 51)

L. Nun sind noch aus Sinussen und Cosinussen gemischte Quotienten von Summen und Unterschieden

in Tangenten und Cotangenten zu verwandeln. Zuerst von Summen.

S. $\frac{\mathfrak{S}.(x+y)+(\mathfrak{S}.x-y)}{\mathfrak{C}.(x+y)+(\mathfrak{C}.x-y)} = \frac{2\,\mathfrak{S}.x \times \mathfrak{C}.y}{2\,\mathfrak{C}.x \times \mathfrak{C}.y}$ (§ 73)

= (Sin. x : Cos. x) : (Cos. y : Cos. y) (A. § 73. 108)

= Tang. x : 1.

L. Nun von Unterschieden.

S. $\frac{\mathfrak{S}.(x+y)-\mathfrak{S}.(x-y)}{\mathfrak{C}.(x-y)-\mathfrak{C}.(x+y)} = \frac{2\,\mathfrak{C}.x \times \mathfrak{S}.y)}{2\,\mathfrak{S}.x \times \mathfrak{S}.y)}$ (§ 73)

= (Cos. x : Sin. y) : (Sin. y : Sin. y)

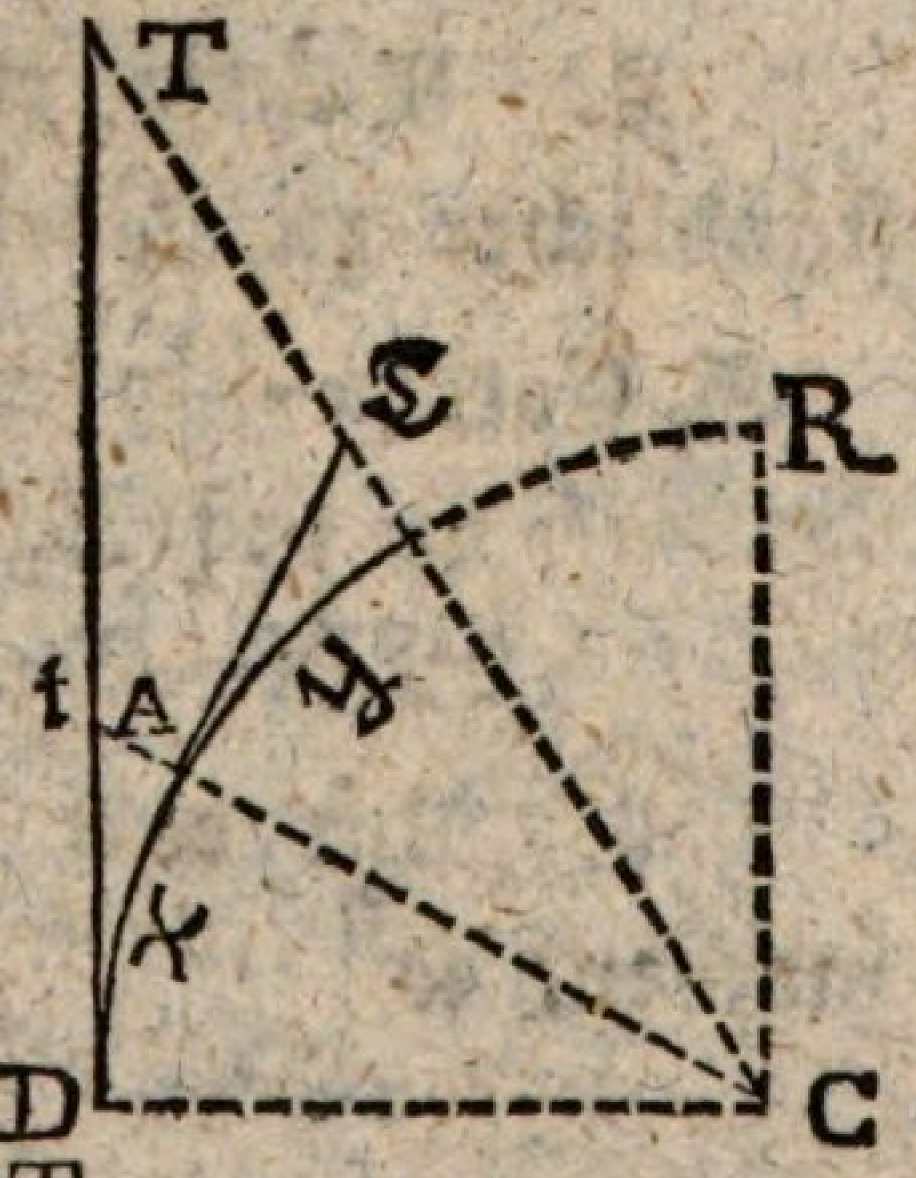
= Cotang. x : 1.

L. Man nennt dieses Verfahren: Quotienten von Sinus- und CosinusSummen und Unterschieden in Tangenten und Cotangenten verwandeln. — Was wird dazu erfodert?

S. Dividendus und Divisor müssen Quotient, aus Sinus und Cosinus werden (§ 51).

§ 75.

Siebzehnter Saz.



L. Auf dem ViertelUmfange DR sind zwei an einander hängende Bögen x und y abgestekkt. Welches sind ihre Tangenten?

S. Tang. x = Dt
Tang. y = A𝔗 } (§ 29).

L. Und die Tangente ihrer Summe?

S. Tangente (x + y) = DT.

L. Tangente x und Tangente y werden gegeben,

und aus ihnen wird für Tangente $(x + y)$ eine Formel gesucht.

S. Tg. $(x + y) =$ Sin. $(x + y)$: Cos. $(x + y)$ (§ 51. 53).

L. Nun für Tangente $(x + y)$ eine andre Formel, welche stat Sinus und Cosinus Tangenten enthält, zu finden.

S. Tg. $(x + y) =$ Sin. $(x + y)$: Cos. $(x + y)$
$= [(S.x \times C.y) + (C.x \times S.y)$ (§ 61)] : $[(C.x \times C.y) -$
$(S.x \times S.y)$ (§ 62)]
$= \frac{S.x \times C.y}{C.x \times C.y} + \frac{C.x \times S.y}{C.x \times C.y} : \frac{C.x \times C.y}{C.x \times C.y} - \frac{S.x \times S.y}{C.x \times C.y}$
(A. § 113)
$= [(S.x : C.y) + (S.y : C.y)] : [1 - (S.x : C.y) \times$
$(S.y : C.y)]$
$=$ (Tang. x + Tang. y) : [1 − Tg. x × Tg. y)] (§. 51)

L. Nun müssen wir auch für Cotangente $(x + y)$ eine der vorigen ähnliche, bloß aus Tangenten zusammen gesetzte, Formel suchen.

S. Ich kehre die vorige um:
Cot. $(x + y) = (1 -$ Tg. x × Tg. y) : (Tg. x × Tg. y)

L. Richtig ist es: wir wollen aber doch umständlicher zu Werke gehn.

S. Cot. $(x + y) = 1$: Tg. $(x + y)$ (§ 51. 53)
$= 1$: [(Tg. x + Tg. y) : (1 − Tg. x × Tg. y)]
$= (1 -$ Tg. x × Tg. y) : (Tg. x + Tg. y) (A. § 102)

L. Um eine Anwendung von diesen Formeln zu machen, sei

$x = 45°$,
$y = 30°$:

welches ist Tangente $(45° + 30°) =$ Tang. 75°?

S. Tang. 75°

$= (Tg. 45° + Tg. 30°) : [1 - (Tg. 45° \times Tg. 30°)]$

$= (1 + S. 30° : C. 30°) : [1 - (1 \times S. 30° : C. 30°)]$ (§ 51)

$= (1 + 0,5 : \frac{1}{2}\sqrt{3}) \quad : \quad [1 - (0,5 : \frac{1}{2}\sqrt{3})]$ (§ 51)

$= 1 + 1 : \sqrt{3}) \quad : \quad (1 - 1 : \sqrt{3})$ (A. § 83)

L. Wir können uns eines beschwerlichen Dividirens überheben, wenn wir aus dem Divisor die Irrationalität wegschaffen (§ 193).

S. $\frac{(1+1:\sqrt{3})(1+1:\sqrt{3})}{(1-1:\sqrt{3})(1+1\ \sqrt{3})} = \frac{4:3+2:\sqrt{3}}{2:3}$

$= \frac{12:3+6:\sqrt{3}}{2}$ (A. § 80)

$= 6:3 + 3:\sqrt{3}$ (A. § 84)

$= \quad 2 \quad + 3 : \sqrt{3}$

$= \quad 2 \quad + 3\sqrt{3} : \sqrt{3}\sqrt{3}$ (A. § 80. 118)

$= \quad 2 \quad + 3\sqrt{3} : 3$ (A. § 190)

$= \quad 2 \quad + \sqrt{3}$

$= \quad 2 \quad + 1,73205080$

$= \quad 3,73205080$

L. Nun auch die Cotangente von 75 Grad!

S. Cotang. 75° $= 1 :$ Tang. $(45° + 30°)$

$= 1 : 3,732005080$

$= 0,26794919$

$=$ Tang. 15°.

L. Die Rechnung ist richtig, kan aber nur Stat finden, wan man die Tangente (45° + 30°) schon kennt. Gesetzt aber diese wäre unbekant, und man wolte Cotangente (45° + 30°) ohne dieselbe finden?

S. Ct.$(45° + 30° = [1 - (T. 45° \times T. 30°)] : (T. 45° + T. 30°)$

$= [1 - (1 \times \frac{Sin. 30°}{Cos. 30°})] : (1 + \frac{Sin. 30°}{Cos. 30°})$

$$= \left(1 - \frac{0{,}5}{\sqrt{3:2}}\right) : \left(1 + \frac{0{,}5}{\sqrt{3:2}}\right)$$
$$= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) : \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$= \left(\tfrac{4}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) : \tfrac{2}{3} \text{ (A. § 193)}$$
$$= \left(4 - \frac{6}{\sqrt{3}}\right) : 2 \text{ (A. § 111)}$$
$$= 2 - \frac{3}{\sqrt{3}}$$
$$= 2 - (3\sqrt{3} : 3)$$
$$= 2 - \sqrt{3}$$
$$= 2 - 1{,}73205080$$
$$= 0{,}26794919.$$

§ 76.

Achtzehnter Satz.

L. Vorhin fanden wir aus den Tangenten zweier Bögen die Tangente und Cotangente ihrer Summe; jezt wollen wir aus den Tangenten zweier Bögen, die Tangente und Cotangente ihres Unterschiedes finden lernen. Es ist nicht schwer, wenn wir die vorige Auflösung (§ 75) vor Augen haben. — Welches ist nun zuerst Tangente (x — y)?

$$\text{S. Tg. } (x - y) = \text{S. } (x - y) : \text{C. } (x - y) \text{ (§ 51. 53)}$$
$$= [(\text{S.}x \times \text{C.}y) - (\text{C.}x \times \text{S.}y)] : [(\text{S.}x \times \text{S.}y) + (\text{C.}x \times \text{C.}y)] \text{ (§ 62. 64}$$
$$= \frac{[(\text{S.}x \times \text{C.}y) - (\text{C.}x \times \text{S.}y)]}{\text{C. } x \times \text{C. } y} : \frac{(\text{S.}x \times \text{S.}y) + (\text{C.}x \times \text{C.}y)}{\text{C. } x \times \text{C. } y} \text{ (A. § 113}$$
$$= \left\{\frac{\text{Sin. } x}{\text{Cos. } x} - \frac{\text{Sin. } y}{\text{Cos. } y}\right\} : \left\{\frac{\text{Sin. } x}{\text{Cos. } x} \times \frac{\text{Sin. } y}{\text{Cos. } y} + 1\right\}$$
$$= (\text{Tg. } x - \text{Tg. } y) : [(\text{Tg. } x \times \text{Tg. } y) + 1]$$

L. Nun auch die Cotangente (x — y)!

S. Cot. (x — y) = Cos. (x — y) : Sin. (x — y) (§ 51)
$= [(S.x \times S.y) + (C.x \times C.y) : [(C.x \times C.y) - (C.x \times S.y)]$
(§ 63 (§ 62)

$$= \frac{[(S.x \times S.y) + (C.x \times C.y)}{C.\ x \times C.\ y} : \frac{(S.x \times C.y) - (C.x \times S.y)}{C.\ x \times C.\ y}$$

$$= \left(\frac{Sin.\ x}{Cos.\ x} \times \frac{Sin.\ y}{Cos.\ y} + 1\right) : \left(\frac{Sin.\ x}{Cos.\ x} - \frac{Sin.\ y}{Cos.\ y}\right)$$

$= [(Tang.\ x \times Tang.\ y) + 1] : (Tang.\ x - Tang.\ y).$

L. Es sei wiederum $x = 45°$, $y = 30°$: welches ist dan Tangente (x — y)?

S. $Tg.\ (x - y) = Tg.\ (45° - 30°) = Tg.\ 15°$
$= (Tg.\ 45° - Tg.\ 30°) : [(Tg.\ 45° \times Tg.\ 30°) + 1]$
$= \left(1 - \frac{Sin.\ 30^0}{Cos.\ 30^0}\right) : [\left(1 \times \frac{Sin\ 30^0}{Cos.\ 30^0}\right) + 1]$ (§ 51)
$= \left(1 - \frac{0{,}5}{\sqrt{3:2}}\right) : \left(\frac{0{,}5}{\sqrt{3:2}} + 1\right)$

u. s. w. wie § 75 Cotang. (45° + 30°).

L. Und Cotangente (45° — 30°)

S. = $Cotang.(45° - 30°) = Cotang.\ 15° = Tang.\ 75°$
$= [(Tg.\ 45° \times Tg.\ 30°) + 1] : (Tg.\ 45° - Tg.\ 30)$
$= [\left(1 \times \frac{Sin.\ 30}{Cos.\ 30}\right) + 1] : \left(1 - \frac{Sin.\ 30^0}{Cos.\ 30^0}\right)$
$= \left(\frac{0{,}5}{\sqrt{3:2}} + 1\right] : \left(1 - \frac{0{,}5}{\sqrt{3:2}}\right)$

u. s. w. wie § 75 Tang. (45° + 30°).

§ 77.

Neunzehnter Satz.

L. Nun müssen wir auch aus der Tangente eines Bogens, die Tangente und Cotangente des doppelten Bogens finden. Es sei gegeben die Tangente x; welches ist die Tangente 2x?

S. Tang. x = Sin. x : Cosin. x (§ 51)
Tang. 2x = Sin. 2x : Cosin. 2x (§ 53).

L. Wenn man die Sinusse und Cosinusse schon kennt, so ist das freilich die kürzeste Rechnung: Gesetzt aber sie wären noch unbekant, und es solte Alles durch Tangenten ausgedrükkt werden?

S. So nehme ich x = y an; da ist

$$\text{Tg.}(x+y) = (\text{Tg.}x + \text{Tg.}y) : [1 - (\text{Tg.}x \times \text{Tg.}y)] \quad (\S\ 75)$$
$$= \text{Tg. } 2x = 2 \text{ Tg. } x : [1 - (\text{Tg. } x)^2].$$

L. Und Cotangente 2x?

S. $\text{Cot.}(x+y) = [1 - (\text{Tg.}x \times \text{Tg.}y)] : (\text{Tg.}x + \text{Tg.}y) \quad (\S\ 74)$

$$= \text{Cot. } 2x = (1 - (\text{Tg. } x)^2] : 2 \text{ Tg. } x$$

L. Es sei x = 30°: welches ist dan Tang. 2x?

S. Dan ist Tg. 2x = Tg. 2 × 30° = Tg. 60°

$$= 2 \text{ Tg. } 30^\circ : [1 - (\text{Tg. } 30^\circ)^2]$$
$$\left.\begin{array}{l} = 2 \dfrac{\text{Sin. } 30^\circ}{\text{Cos. } 30^\circ} : [1 - (\dfrac{\text{Sin. } 30^\circ}{\text{Cos. } 30^\circ})^2] \\ = 2 \dfrac{0,5}{\sqrt{3:2}} : [1 - (\dfrac{0,5}{\sqrt{3:2}})^2] \end{array}\right\} (\S\ 50)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3:2}} : [1 - (\frac{1}{\sqrt{3}})^2]$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}} : [1 - \tfrac{1}{3}] = \frac{2}{\sqrt{3}} : \tfrac{2}{3}$$

L. Es muß weiter gerechnet werden, bis wir $\sqrt{3}$ erhalten.

S. $= \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} : \tfrac{2}{3} - = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} : \tfrac{2}{3}$

$$= \frac{2\sqrt{3} : 2}{3 : 3} \text{ (A. § 100)} = \sqrt{3}$$
$$= 1,7320508 \text{ (§ 38).}$$

L. Nun mag x einmal 60 Grad bedeuten.

S. So ist Tg. 2x = Tg. 2×60° = Tg. 120°

$$= 2 \text{ Tg. } 60^\circ : [1 - (\text{Tg. } 60^\circ)^2]$$
$$= : \frac{\text{Sin. } 60^\circ}{\text{Cos. } 60^\circ} : [1 - (\frac{\text{Sin. } 60^\circ}{\text{Cos. } 60^\circ})^2]$$

$$= 2\,\frac{\sqrt{3 : 2}}{0{,}5} : \left[1 = \left(\frac{\sqrt{3 : 2}}{0{,}5}\right)^2\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{0{,}5} : \left[1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)^2\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{1 : 2} : [1 - 3]$$

$$= 2\sqrt{3} : -2 = -\sqrt{3} \text{ (§ 35).}$$

§ 78.

Zwanzigster Satz.

L. $\left.\begin{array}{l} 1 - 2\,(\text{Sin. } x) = \text{Cos. } 2x \\ \text{und } 2\,(\text{Cos. } x)^2 - 1 = \text{Cos. } 2x \end{array}\right\}$ (§ 69)

Hieraus lassen sich für Sinus x, und für Cosinus x neue Formeln ableiten. Zuerst für Sinus x.

S. $1 - 2\,(\text{Sin. } x)^2 = \text{Cos. } 2x$

$-\,2\,(\text{Sin. } x)^2 = \text{Cos. } 2x - 1$ (G. § 37)

$+\,2\,(\text{Sin. } x)^2 = 1 - \text{Cos. } 2x$ (A. § 193)

$(\text{Sin. } x)^2 = (1 - \text{Cos. } 2x) : 2$ (A. § 151)

$\text{Sinus } x = \sqrt{}\,[(1 - \text{Cos. } 2x) : 2]$

L. Nun für Cosinus x!

S. $2\,(\text{Cos. } x)^2 - 1 = \text{Cos. } 2x$

$2\,(\text{Cos. } x)^2 = \text{Cos. } 2x + 1$ (G. § 36)

$(\text{Cos. } x)^2 = (\text{Cos. } 2x + 1) : 2$

$\text{Cosinus } x = \sqrt{}\,[(\text{Cos. } 2x + 1) : 2]$

L. Und da Tangente x = Sinus x : Cosinus x (§ 51); so geben diese jetzt gefundenen Formeln auch neue Formeln für die Tangente.

S. Tg. x = Sinus x : Cosin. x

$$= \sqrt{\frac{1 - \text{Cos. } 2x}{2}} : \sqrt{\frac{1 + \text{Cos. } 2x}{2}}$$

$$= \sqrt{(1 - \text{C.}2x)} : \sqrt{(1 + \text{C.}2x)} \text{ (A. § 111)}$$

L. Die Formel wird bequemer, wenn aus dem Divisor, oder dem Dividendus das WurzelZeichen weggeschafft wird.

$$\text{S. Tg. } x = \frac{\sqrt{(1 - \text{Cos. } 2x)}}{\sqrt{(1 + \text{Cos. } 2x)}} \text{ (A. § 108)}$$

$$= \frac{\sqrt{(1 - \text{C.}2x)} \times \sqrt{(1 - \text{C.}2x)}}{\sqrt{(1 + \text{C.}2x)} \times \sqrt{(1 - \text{C.}2x)}} \text{ (A. § 80)}$$

$$= \frac{1 - \text{Cos. } 2x \text{ (A. § 190)}}{\sqrt{[1 - (\text{Cos. } 2x)^2]}}$$

L. Aber $\sqrt{[1 - (\text{Cos. } 2x)^2]}$ = Sin. 2x (§ 51. 53): folglich = = ?

$$\text{S. Tg. } x = \frac{1 - \text{Cos. } 2x}{\sqrt{[1 - (\text{Cs.}2x)^2]}} = \frac{1 - \text{Cos. } 2x}{\text{Sin. } 2x}$$

L. In $\frac{1 - \text{Cos } 2x}{\sqrt{[1 - (\text{Cos. } 2x^2]}}$ ist aus dem Zähler das WurzelZeichen weggeschafft; nun wollen wir es aus dem Nenner wegschaffen.

$$\text{S. Tg. } x = \frac{\sqrt{(1 - \text{Cos. } 2x)} \times \sqrt{(1 + \text{Cos. } 2x)}}{\sqrt{(1 + \text{Cos. } 2x)} \times \sqrt{(1 + \text{Cos. } 2x)}}$$

$$= \frac{\sqrt{[1 - (\text{Cos. } 2x)^2]}}{1 + \text{Cos. } 2x} = \frac{\text{Sin. } 2x}{1 + \text{Cos.} 2x}$$

L. Man kan es noch weiter treiben, und auch für 1 + Cosinus 2x und 1 — Cosinus 2x andre Ausdrükke suchen, indem man Cosinus x = 1 : Secante x (§ 51) zum Grunde legt.

S. Cos. x = 1 : Sec. x

Cos. 2x = 1 : Sec. 2x (§ 51. 53)

$$1 \mp \text{Cos. } 2x = 1 \mp \frac{1}{\text{Sec } 2x}$$

$$= \frac{\text{Sec. } 2x}{\text{Sec. } 2x} + \frac{1}{\text{Sec. } 2x} \quad (\text{A. § 75})$$

$$= \frac{\text{Sec. } 2x + 1}{\text{Sec. } 2x}$$

$$(\text{Tg. } x)^2 = \frac{1 - \text{Cos. } 2x}{1 + \text{Cos. } 2x} = \frac{\text{Sec. } 2x - 1}{\text{Sec } 2x} : \frac{\text{Sec. } 2x + 1}{\text{Sec. } 2x}$$

$$= (\text{Sec. } 2x - 1) : (\text{Sec. } 2x + 1)$$

(A. § 111)

$$= \frac{(\text{Sec. } 2x - 1) \times (\text{Sec. } 2x - 1)}{(\text{Sec. } 2x + 1) \times (\text{Sec. } 2x - 1)}$$

$$= (\text{Sec. } 2x - 1)^2 : [(\text{Sec. } 2x)^2 - 1]$$

$$\text{Tg. } x = (\text{Sec. } 2x - 1) : (\text{Sec. } 2x)^2 - 1$$

Oder auch:

$$\text{Tang. } x^2 = \frac{(\text{Sec. } 2x - 1) \times (\text{Sec. } 2x + 1)}{(\text{Sec. } 2x - 1) \times (\text{Sec. } 2x + 1)}$$

$$= (\text{Sec. } 2x)^2 - 1 : (\text{Sec. } 2x + 1)^2$$

$$\text{Tang. } x = \sqrt{[(\text{Sin. } 2x)^2 - 1]} : (\text{Sec. } 2x + 1)$$

$$= \text{Tang. } 2x : (\text{Sec. } 2x + 1)$$

L. Dan haben wir eine Menge neuer Formeln für Tangente x, aus welcher sich wiederum Formeln für Tangente $\frac{x}{2}$ ergeben

Z. B. $\text{Tang. } x = \text{Sin. } 2x : (1 + \text{Cos. } 2x)$

$$\text{Tang. } \tfrac{x}{2} = \text{Sin. } x : (1 + \text{Cos. } x) \quad (\text{§ } 53)$$

Es sei $x = 60°$: welches ist $\text{Tang. } \frac{x}{2} = \text{Tang. } 30°$?

S. $\text{Tang. } \frac{x}{2} = \text{Sin. } x : (1 + \text{Cos. } x)$

$$\text{Tang. } 30° = \text{Sin. } 60 : (1 + \text{Cos. } 60°)$$

$$= (\sqrt{3} : 2) : (1 + 0{,}5) \quad (\text{§ } 51)$$

$$= \sqrt{3} : 3 \quad (\text{§ A. § } 111)$$

$$= 0{,}57735 \ldots$$

§ 79.

L. Lassen sich nicht für die Cotangenten auch neue Formeln angeben?

S. Da Tang. x = Sin. x : Cos. x
und Cotang. x = Cos. x : Sin. x } (§ 51)

so braucht man die für die Tangenten gefundenen Formeln nur umzukehren; aus dem Divisor den Dividendus, und aus dem Dividendus den Divisor zu machen. So wird

$$\text{Cotang. } x = (1 + \text{Cos. } 2x) : \text{Sin. } 2x$$
$$= \text{Sin. } 2x : (1 - \text{Cos. } 2x)$$

u. s. w. (§ 78).

L. Es sei wieder $x = 60°$: was ist Cotangente $\frac{x}{2}$?

S. Dan ist Cotang. $\frac{x}{2}$ = Cotang. 30°

$$= (1 + \text{Cos. } x) : \text{Sin. } x$$
$$= (1 + \text{Cos. } 60°) : \text{Sin. } 60°$$
$$= (1 + 0{,}5) : (\sqrt{3} : 2)$$
$$= 3 : \sqrt{3} \text{ (A. § 111)}$$
$$= 3\sqrt{3} : \sqrt{3}\sqrt{3} \text{ (A. § 119)}$$
$$= 3\sqrt{3} : 3$$
$$= \sqrt{3} = 1{,}7320508$$
$$= \text{Tang. } 60° \text{ (§ 77).}$$

III.

Von den trigonometrischen Tafeln.

---

§ 80.

Ein und zwanzigster Satz.

L. Wir haben gelernt den Sinus von 30 und den von 45 Grad zu finden (§ 5. 6). Der von 36 Grad lässt sich auch berechnen, obgleich es hier noch nicht gelehrt ist. Mittels dieser drei Sinusse nun lassen sich andere finden. Zuerst wollen wir untersuchen, welche Sinusse der Sinus von 45 Grad uns liefert: jedoch nur bis auf Minuten, und nur für den ersten Quadranten, weil die Sinusse der folgenden denen des ersten gleich sind (§ 11. 12. 13).

S. 1) Durch Halbung (§ 7. 71) erhält man: Sinus 22° 30′, und 11° 15′; und deren Cosinusse 67° 30′ und 78° 45′ (§ 16. 19).

2) Durch Zusammensetzung (§ 61).

Sin. (45° + 22° 30′) = Sin. 67° 30′ (ist schon bekant)

Sin. (45° + 11° 15′) = Sin. 56° 15′

Sin. (67° 30′ + 11° 15′ = Sin. 78° 45′ (schon bekant)

Cos. 56° 15′ = Sin. 33° 45′.

3) Durch neue Halbung:

Cosin. 67° 30′ und Cos. 78° 45′ sind auch schon bekant

Sin. (67° 30′) : 2 = 33° 45′ (schon bekant).

L. Also nur sechs neue Sinusse liefert uns der Sinus von 45 Grad. Vielleicht gibt der von 30 reichlichere Ausbeute.

S. Die Sinusse, welche den von 30 Grad liefert, sind der von 60° (§ 19); der von 15°, von 7° 30', von 3° 45' (§ 71); von 75°, von 82° 30', von 86° 15' (§ 19); von 67° 30', von 63° 45', von 37° 30', von 33° 45', von 22° 30', von 18° 45', von 48° 45', von 78° 45', von 41° 15', von 71° 15' (§ 60). Und nun von allen diesen die Cosinusse, welche sind der Sinus von 26° 15', von 52° 30', von 56° 15', von 41° 15', von 11° 15', von 63° 45' (§ 19).

L. Der Sinus von 30 Grad ist also fruchtbarer an neuen Sinussen als der von 46; am allerfruchtbarsten ist der von 36 Grad. Wir wollen uns aber mit Aufzählung derselben nicht verweilen, sondern nur überhaupt bemerken, daß auf diese Art hundert und zwanzig Sinusse gefunden werden, welche, gehörig geordnet, so folgen: 0° 45', 1° 30', 2° 15', 3°, 3° 45', 4° 30', 5° 15', 6°, 6° 45', 7° 30', 8° 15', 9°, 9° 45', 10° 30', 11° 15', 12° und so weiter mit ZwischenRäumen von 45 Minuten.

§ 81.

Zwei und zwanzigster Satz.

L. Nun wissen wir die Sinusse von 45 zu 45 Minuten zu finden: wie werden aber die dazwischen fehlenden Sinusse von Minute zu Minute gefunden?

L. Je kleiner ein KreisBogen angenommen wird, je weniger unterscheidet er sich von seiner Sehne (G. 320); so daß bei einem VielEkke von unendlich iel en Seiten die VielEkksSeiten dem Umfange gleich werden (G. § 322). Was aber von ganzen Bögen

und ganzen Sehnen gilt, muß auch von halben Bögen, und halben Sehnen gelten. Die Sinusse aber sind Halb-Sehnen (§ 4): folglich je kleiner ein Bogen ist, je weniger unterscheidet er sich von seinem Sinus. Um diese Annäherung der Bögen und Sinusse anschaulich zu machen, wollen wir die Länge der Bögen von 3°, von 1° 30′, von 45′, und von 22′ 30″, und ihre Sinusse gegen einander halten. — Welches ist das Verhältniß des Durchmessers zum Umfange?

S. d ‥ p = 1 ‥ 3,141592653 ꞉꞉ (G. § 325).

L. Und des Halbmessers zum Umfange?

S. r ‥ p = 1 ‥ 6,283185306 ꞉ ꞉

L. Welches ist nun die Länge eines Bogens von 3 Grad, in Teilen des Halbmessers?

S. 360° ‥ 3° = 6,2831853 ‥ 0,0523598 ꞉

L. Und die von 1° 30′, von 45′, von 22′ 30″ werden durch Halbungen gefunden. Die ihnen zugehörigen Sinusse wollen wir, der Kürze wegen annehmen, wie sie von Andern schon berechnet sind. So haben wir dan:

Bogen 3° = 0,0523598 ꞉
Sinus 3° = 0,0523360 ꞉
Bog. 1° 30′ = 0,0261799 ꞉
Sin. 1° 30′ = 0,0261769 ꞉
Bogen 45′ = 0,0130899 ꞉
Sinus 45′ = 0,0130896 ꞉
Bog. 22′ 30″ = 0,00654498 ꞉
Sin. 22′ 30″ = 0,00654493 ꞉

Wie viel DecimalStellen haben nun diese Bögen mit ihren Sinussen gemein?

S. Die beiden ersten, vier; die zweiten fünf; die dritten sechse; die vierten sieben.

L. Und nähme man die Bögen noch kleiner, so würden sie sich ihren Sinussen noch mehr nähern. Hieraus ergibt sich, wie die Sinusse von 1, von 2, von 3 ꝛc. Minuten, bis auf eine bestimmte Anzahl DecimalStellen, gefunden werden.

S. Da die Bögen unter 22′30″ wenigstens sieben DecimalZiffern mit ihren Sinussen gemein haben; so braucht man, um die Sinusse auf sieben DecimalStellen zu haben, nur ihre Bögen zu berechnen.

L. Verlangte man aber die Sinusse auf mehr als sieben DecimalStellen = =

S. So müste man das Halben fortsetzen, bis Bogen und Sinus in so viel Ziffern überein kämen als man verlangte.

L. Bis auf zehn DecimalStellen lässt sich auf solche Art der Sinus von 1 Minute berechnen; Mittels dessen wieder Sinusse von 2, von 3 ꝛc. Minuten gefunden werden (§ 68. 61). Verlangte man aber Sinusse der Secunden = = ?

S. Die werden gefunden wie die Minuten, durch Berechnung der Bögen.

§. 82.

L. Hat man die Sinusse für den ViertelKreis, so hat man auch die Cosinusse (§ 16); und aus den Halbmessern, Sinussen und Cosinussen werden alle übrigen trigonometrischen Linien gefunden (§ 51), welche man dan in Tafeln ordnen kan.

§ 83.

L. Da es sehr beschwerlich ist, vielziffrige Zahlen, wie die, welche die trigonometrischen Linien ausdrükken, durch einander zu multipliciren und zu dividiren; so pflegt man sich der Logarithmen zu bedienen, welche die Multiplication in Addition, und die Division in Subtraction verwandeln (A. § 329). Wie diese Logarithmen gefunden werden, ist in der Arithmetik (§ 346) gelehrt. Nur eine kleine Schwierigkeit trit dabei ein. Bekantlich sind alle Sinusse, der einzige Sinustotus ausgenommen, kleiner als der Halbmesser (§ 8). Nimt man nun den Halbmesser = 1 an; so sind alle Sinusse, bis auf den von 90 Grad. kleiner als 1; folglich ächte Brüche (A. § 73). Welche Eigenschaft aber haben die Logarithmen ächter Brüche?

S. Sie sind verneint (A. § 353).

L. Da aber nicht alle trigonometrische Linien durch ächte Brüche ausgedrükkt wurden, indem die Tangenten über 45° Grad, desgleichen alle Secanten grösser sind als der Halbmesser (§ 30. 29); so würde das große Aufmerksamkeit erfodern, zuweilen dennoch Irrungen veranlassen, und das Rechnen erschweren. — Wie ist dieser Unbequemlichkeit nun abzuhelfen?

S. Man muß den Halbmesser grösser als 1 annehmen.

L. Aber wie groß ohngefehr?

S. Es muß eine 1 mit wenigstens so viel Nullen seyn, als die trigonometrischen Linien Ziffern enthalten, oder berechnet sind.

L. Für r = 1 ist Sinus 1′ = 0,0002908882: welches ist nun der Sinus für r = 10?

S. Für r = 10 ist Sin. 1′ = 0,002908882 = = (§ 58)

L. Gesetzt aber der Halbmesser wäre 100 oder 1000?

S. Für r = 100 ist Sin. 1′ = 0,02908882
Für r = 1000 = = = = 0,2908882
Für r = 10000 = = = = 2,908882
Für r = 100000 = = = 29,08882
u. s. w. (A. § 237).

L. Ein Gleiches gilt von allen trigonometrischen Linien.

§. 84.

Die trigonometrischen Linien und ihre Logarithmen sind vorlängst, auf Minuten und SechstelMinuten, ja zum Teil für Secunden, bis auf funfzehn, und mehr DecimalStellen, berechnet, und in Tafeln gebracht. Es gibt mancherlei Ausgaben derselben, unter welchen die des Adrian Vlacq, des Ozanam und des Freiherrn von Wolf die gebräuchlichsten sind. Erste beiden enthalten die natürlichen Zahlen der Sinusse, Tangenten und Secanten, und die künstlichen der Sinusse und Tangenten bis auf Minuten. Hiernächst die Logarithmen der natürlichen Zahlen, von 1 bis 10000; alles bis auf sieben DecimalStellen, berechnet. Voran steht eine, den Gebrauch dieser Tafeln belehrende Einleitung, welche in den vlacqischen Tafeln lateinisch, in den ozanamschen aber Französisch ist. Die wolfischen Tafeln gleichen den vlacqischen, nur daß sie, anstat der Secanten, die Quadrate und Würfel aller Wurzeln von 1 bis 1000

enthalten. — Noch eine sehr brauchbare HandAusgabe ist des kaiserlichen OberstLieutenants Baron von Vega logarithmisch-trigonometrisches HandBuch, welches die Logarithmen der natürlichen Zahlen von 1 bis 100999, und die der trigonometrischen Linien für die sechs ersten und sechs lezten Grade, von 10 zu 10 Minuten, für die übrigen aber von Minute zu Minute, auf sieben DecimalStellen, enthält: nur Schade, daß die natürlichen Zahlen der trigonometrischen Linien, und die Logarithmen der Secanten, darin fehlen!

Eben dieses Verfassers vollständige Sammlung grösserer logarithmisch-trigonometrischer Tafeln, enthält die Logarithmen auf zehn DecimalStellen, für den ersten und lezten Grad von Secunde zu Secunde, für alle übrigen aber von 10 zu 10 Secunden.

Ausser den angezeigten Tafeln sind in Deutschland noch die des Ober-BauRat Schulze bekant, welche die natürlichen Zahlen für den Halbmesser 1, die künstlichen für den Halbmesser 1000 Millionen, und zwar, für die beiden ersten und beiden lezten Grade von Secunde zu Secunde, für die beiden nächstfolgenden von 10 zu 10 Secunden, und für die übrigen von Minute zu Minute, enthalten.

Mehre trigonometrische Tafeln kan man aus Kästners Fortsetzung der RechenKunst, und aus seinen geometrischen Abhandlungen, kennen lernen. (Man vergleiche auch meine Arithmetik § 336 und Trigon. § 85.)

Alle trigonometrische Tafeln haben das gemein, daß sie, der Bequemlichkeit wegen, die Erzeugung des

ViertelUmfangs neben einander stellen, und die QuerSinusse, welche selten gebraucht werden, weglassen. Ihre übrige Einrichtung lernt man am besten aus ihnen selbst. Auch wird etwas darüber weiter hin (§ 95) vorkommen.

* § 85.

Schon lange hatte man die Unschiklichkeit und Unbequemlichkeit der KreisAbteilung in 360 Grad, und der UnterAbteilung nach Sechzigen, gefühlt, und eine bequemere, zehnteilige, gewünscht; aber niemand wolte die Bahn brechen; jeder scheute die mühsame, vielleicht undankbare Umarbeitung der grossen und kostbaren Werke des alten Systems. Unsern Zeiten war die Ausführung dieses grossen Unternehmens vorbehalten. Der erste Entwurf dazu wurde in Frankreich gemacht, und sollte von vielen Arbeitern unter Aufsicht des Ingenieur Prony, und auf Kosten der Nation, ausgeführt werden: ehe dis grosse Werk aber zu Stande kam, lieferten zwei Deutsche Gelehrte, Johann Philipp Hobert und Ludewig Ideler, „neue trigonometrische Tafeln für die Decimal-Einteilung des Quadranten 1 berechnet. Darin nehmen sie den ViertelUmfang 1 an; und teilen ihn dan, nach dem Decimalsystem, in 10, in 100, in 1000 ꝛc. gleiche Teile, und liefern die natürlichen und die künstlichen Zahlen der Sinusse, Cosinusse, Tangenten und Cotangenten bis auf sieben DecimalStellen; und das für die ersten lezten 2 Grade 42 Minuten, von $3\frac{24}{100}$ zu $3\frac{24}{100}$ Secunde; in der Mitte aber von $32\frac{4}{10}$ zu $32\frac{4}{10}$ Secunden. — Es ist besserer Verständlichkeit wegen, daß ich mich, in dieser Beschreibung,

der SexagesimalEinteilung bediene. — Sonst enthalten diese Tafeln noch manche nüzliche Anhänge.

* § 86.

Französische Mathematiker haben schon angefangen sich der neuen KreisEinteilung in Werkzeugen und Schriften zu bedienen, und es ist vorauszusehn, daß ihnen Mehre folgen werden, wenn nur erst alle dazu nöthigen Tafeln fertig seyn werden; wodurch Jeder genötigt wird, sich damit bekant zu machen, gesetzt auch, daß er selbst sich ihrer nicht bedienen wolte. Das erste Erfoderniß hierzu ist, die Verwandlung der einen Einteilung in die andre; und dazu soll hier Anleitung erfolgen. Zur Bezeichnung der DecimalEinteilung des Kreises schlagen Hobert und Ideler ein Q oder R vor, z. B.:

$90^{\circ} = 1{,}0000 :: Q$ oder $0{,}1111 :: R$

mir scheint aber ein ViertelKreis schiklicher.

$90^{\circ} = 1{,}00000 :: ⌂$.

* § 87.

Drei und zwanzigster Saz.

L. 90 Grad der alten KreisAbteilung machen nach der neuen $1 = 1{,}0 = 1{,}00$ rc. (§ 85): was machen 45 Grad?

S. $90^{\circ} .. 1$ ⌂ $= 45^{\circ} .. \frac{45}{90}$ ⌂ (A. § 294)

Aber $\frac{45}{90} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ (A. § 233).

L. Und was betragen 9 Grad?

S. $90^{\circ} .. 1 = 9^{\circ} .. 0{,}1$

L. Aber 1 Grad, was beträgt der nach DecimalMaß?

S. $90^{\circ} \ldots = 1^{\circ} \ldots (1 : 90^{\circ})$

$1 : 90^{\circ} = 0{,}01111111 \ldots$

L. Und was beträgt 1 Minute?

S. $90^{\circ} \ldots = 1' \ldots (1' : 90^{\circ})$

$$1' : 90^{\circ} = (\tfrac{1}{60})^{\circ} : 90^{\circ}$$

$$= \frac{1}{60 \times 90} = \tfrac{1}{5400}$$

$$= 0{,}001851851 85 \ldots$$

Oder auch:

$1^{\circ} : 60 = 0{,}111111 \ldots : 60 = 0{,}00185185 \ldots$

L. Diese Exempel sind hinreichend das Verwandeln der Grade, Minuten und Secunden in DecimaleTeile des ViertelKreises daran zu lernen. Zu Erlangung grösserer Fertigkeit, und zu bequemerer Uebersicht aber wollen wir Tafeln für alle einzelne Grade und Minuten des ViertelKreises verfertigen,

I) Verwandlung der Grade in DecimalTeile des Quadranten.

Grade	DecimalTeile	Grade	DecimalTeile	Grade	DecimalTeile
1	0,011111	31	0,344444	61	0,677777
2	0,022222	32	0,355555	62	0,688888
3	0,033333	33	0,366666	63	0,7
4	0,044444	34	0,377777	64	0,711111
5	0,055555	35	0,388888	65	0,722222
6	0,066666	36	0,4	66	0,733333
7	0,077777	37	0,411111	67	0,744444
8	0,088888	38	0,422222	68	0,755555
9	0,1	39	0,433333	69	0,766666
10	0,111111	40	0,444444	70	0,777777
11	0,122222	41	0,455555	71	0,788888
12	0,133333	42	0,466666	72	0,8
13	0,144444	43	0,477777	73	0,811111
14	0,155555	44	0,488888	74	0,822222
15	0,166666	45	0,5	75	0,833333
16	0,177777	46	0,511111	76	0,844444
17	0,188888	47	0,522222	77	0,855555
18	0,2	48	0,533333	78	0,866666
19	0,211111	49	0,544444	79	0,877777
20	0,222222	50	0,555555	80	0,888888
21	0,233333	51	0,566666	81	0,9
22	0,244444	52	0,577777	82	0,911111
23	0,255555	53	0,588888	83	0,922222
24	0,266666	54	0,6	84	0,933333
25	0,277777	55	0,611111	85	0,944444
26	0,288888	56	0,622222	86	0,955555
27	0,3	57	0,633333	87	0,966666
28	0,311111	58	0,644444	88	0,977777
29	0,322222	59	0,655555	89	0,988888
30	0,333333	60	0,666666	90	1,000000

In dieser Tafel kan die jedesmalige lezte DecimalZiffer so oft wiederholt werden, als man es nötig findet.

II) Verwandlung der Minuten in DecimalTeile des Quadranten.

Min.	DecimalTeile	Min.	DecimalTeile	Min.	DecimalTeile
1	0,000 185	21	0,003 888	41	0,007 592
2	0,000 370	22	0,004 074	42	0,007 777
3	0,000 555	23	0,004 259	43	0,007 962
4	0,000 740	24	0,004 444	44	0,008 148
5	0,000 925	25	0,004 629	45	0,008 333
6	0,001 111	26	0,004 814	46	0,008 518
7	0,001 296	27	0,005 000	47	0,008 703
8	0,001 481	28	0,005 185	48	0,008 888
9	0,001 666	29	0,005 370	49	0,009 074
10	0,001 851	30	0,005 555	50	0,009 259
11	0,002 037	31	0,005 740	51	0,009 444
12	0,002 222	32	0,005 925	52	0,009 629
13	0,002 407	33	0,006 111	53	0,009 814
14	0,002 592	34	0,006 296	54	0,010 000
15	0,002 777	35	0,006 481	55	0,010 185
16	0,002 962	36	0,006 666	56	0,010 370
17	0,003 148	37	0,006 851	57	0,010 555
18	0,003 333	38	0,007 037	58	0,010 740
19	0,003 518	39	0,007 222	59	0,010 925
20	0,003 703	40	0,007 407	60	0,011 111

In dieser Tafel können die jedesmaligen drei lezten DecimalZiffern so oft wiederholt werden, als man es nötig erachtet. Z. B.:

1′ = 0,000 185 185 185 : : ◺

20′ = 0,003 703 703 703 : : ◺

u. s. w.

* § 88.

Vier und zwanzigster Saz.

L. Wir haben gelernt Grade, Minuten ꝛc. in DecimalTeile des ViertelKreises verwandeln, nun

müssen wir auch die Verwandlung der Decimal-Teile des ViertelKreises in Grade, Minuten, Secunden &c. lernen. — Was beträgt 1 der neuen Einteilung, nach der alten?

S. 1 ◺ = 90° (§ 85).

L. Und 0,1? 0,01? 0,001? 0,0001?

S. 1 ◺ .. 90° = 0,1 .. 9° (A. § 233. 229)

Folglich 0,01 = 9° : 10 = 540′ : 10 = 54
0,001 = 9° : 100 = 324″ = 5′ 24″
0,0001 = 9° : 1000 = 324″ : 10 = (32,4)″
= 32″ 24‴

L. Aber 2? 0,2? 0,02? 0,002?

S. 2 = 90° × 2 = 180°
0,2 = 180° : 10 = 18
0,02 = 18° : 10 = 108′ = 1° 48′
0,002 = 108′ : 10 = 648″ = 10′ 48″.

L. Zur Uebung wollen wir nun eine Tafel verfertigen, welche alle DecimalTeile des Quadranten von 0,01 bis 1, in Grade und Minuten verwandelt enthält.

Dec. Teile	Gr.	M.	Dec T.	Gr.	M.	Dec T.	Gr.	M.	Dec. T	Gr.	M.
0,01 ◻	0	54	0,26	3	24	0,51	45	54	0,76	68	24
0,02	1°	48	0,27	24	18	0,52	46	48	0,77	69	18
0,03	2	42	0,28	25	12	0,53	47	42	0,78	70	12
0,04	3	36	0,29	26	6	0,54	48	36	0,79	71	6
0,05	4	30	0,30	27	0	0,55	49	30	0,80	72	0
0,06	5	24	0,31	27	54	0,56	50	24	0,81	72	54
0,07	6	18	0,32	28	48	0,57	51	18	0,82	73	48
0,08	7	12	0,33	29	42	0,58	52	12	0,83	74	42
0,09	8	6	0,34	30	36	0,59	53	6	0,84	75	36
0,10	9	0	0,35	31	30	0,60	54	0	0,85	76	30
0,11	9	54	0,36	32	24	0,61	54	54	0,86	77	24
0,12	10	48	0,37	33	18	0,62	55	48	0,87	78	18
0,13	11	42	0,38	34	12	0,63	56	42	0,88	79	12
0,14	12	36	0,39	35	6	0,64	57	36	0,89	80	6
0,15	13	30	0,40	36	0	0,65	58	30	0,90	81	0
0,16	14	24	0,41	36	54	0,66	59	24	0,91	81	54
0,17	15	18	0,42	37	48	0,67	60	18	0,92	82	48
0,18	16	12	0,43	38	42	0,68	61	12	0,93	83	42
0,19	17	6	0,44	39	36	0,69	62	6	0,94	84	36
0,20	18	0	0,45	40	30	0,70	63	0	0,95	85	30
0,21	18	54	0,46	41	24	0,71	63	54	0,96	86	24
0,22	19	48	0,47	42	18	0,72	64	48	0,97	87	18
0,23	20	42	0,48	43	12	0,73	65	42	0,98	88	12
0,24	21	36	0,49	44	6	0,74	66	36	0,99	89	6
0,25	22	30	0,50	45	0	0,75	67	30	1,00	90	0

* § 89.

L. Zur Verfertigung der Tafeln für die trigonometrischen Linien nach der DecimalEinteilung bedarf es keiner besondern Anweisung: sie stimmt im Wesentlichen mit der für die SexagesimalEinteilung (§ 79. 80. 81) überein. Welches, z. B., ist Sinus 0,5?

S. $\text{Sin.} 0,5 ◻ = \text{Sin.} 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0,70710678 ::$ (§ 51).

L. Und Sinus 0,333333 = = ?

S. Sin. 0,333333 ◻ = Sin. $\frac{1}{3}$ ◻ = Sin. 30° = 0,5

L. Und Sinus 0,4 ?

S. Sin. 0,4 = Sin. 36° = 5877853.

L. Diese drei Sinusse nun geben die GrundLage aller übrigen. So findet man aus Sinus 0,5 ◻ = Sinus 45° ?

S. Sin. 45° = Sin. 0,4 ◻ gibt durch Halbung (§ 80)

a) Sin. 22° 30′ = Sin. 0,25 ◻

b) Sin. 11° 15′ = Sin. 0,124999 ◻

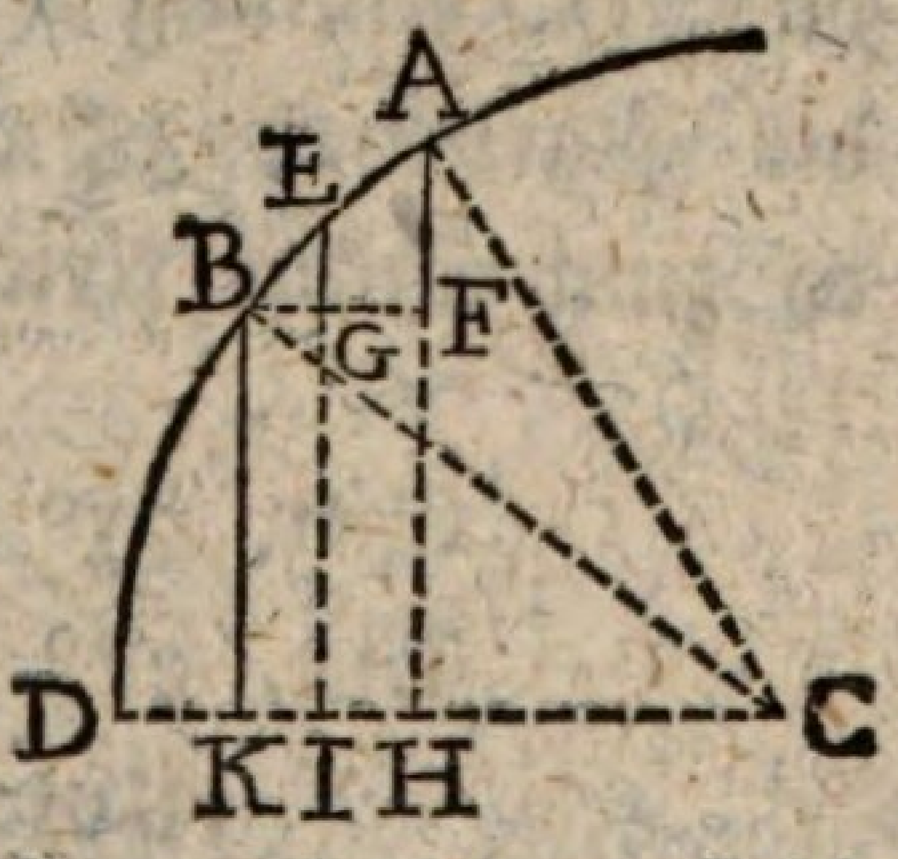
c) Cos. 22° 30′ = Sin. 67° 30′ = Sin. 0,749999 ◻

d) Cos. 11° 15′ = Sin. 78° 45′ = Sin. 0,874999 ◻

L. Dis wird hinlänglich seyn, um die Uebereinstimmung beider Berechnungen daraus zu erkennen.

§ 90.

Fünf und zwanzigster Satz.



L. Auf dem Umfange eines Kreises bedeute AB einen Bogen von einer Minute, und EB einen kleinern von x Secunden. Hier kan man AEB als eine gerade Linie annehmen (G. § 322). Zieht man nun die Sinusse AH, EI, BK; und hierauf die Linie BG gleichlaufend DC: so erhält man ein Dreiekk ABF, in welchem EG ⧺ AF. Und woher das?

S. Zwei Linien, welche auf einer dritten senkrecht stehn, sind einander gleichlaufend (G. § 106).

L. Und was folgt hieraus?

S. BA .. BE = AF .. EG (G. § 246).

L. Das heisst: Ein Bogen BD und dessen

Sinus BK wachsen von B bis A, das ist, in dem ZwischenRaume von 1 Minute beinahe verhältnißmäßig. Zum Beispiel:

$$\text{Ist } BE = \tfrac{1}{2} BA = 30''$$

$$\text{so ist Sin. } (DB + BE) = \text{Sin. } (DB + 30'')$$
$$= BK + EG = BK + \tfrac{1}{2} AB$$

Hierauf gründet sich die nun folgende Aufgabe.

§. 91.

Sechs und zwanzigster Satz.

L. Gesetzt man hätte Tafeln, welche nur auf Minuten berechnet wären, und man wollte den Sinus eines Bogens von 27 Grad, 18 Minuten und 33 Secunden wissen?

S. So suche ich den Unterschied des nächst grössern und nächst kleinern, und suche, nach der VerhältnißRechnung (A. § 294 f.), wie viel deren auf die gegebenen 33 Secunden fallen (§ 90), und addire es zum nächst kleinern.

A

$$\text{Sin. } 27^\circ\ 19' = 4589080$$
$$\text{Sin. } 27^\circ\ 18' = 4586495$$
$$\text{Unterschied} = 2585$$

B

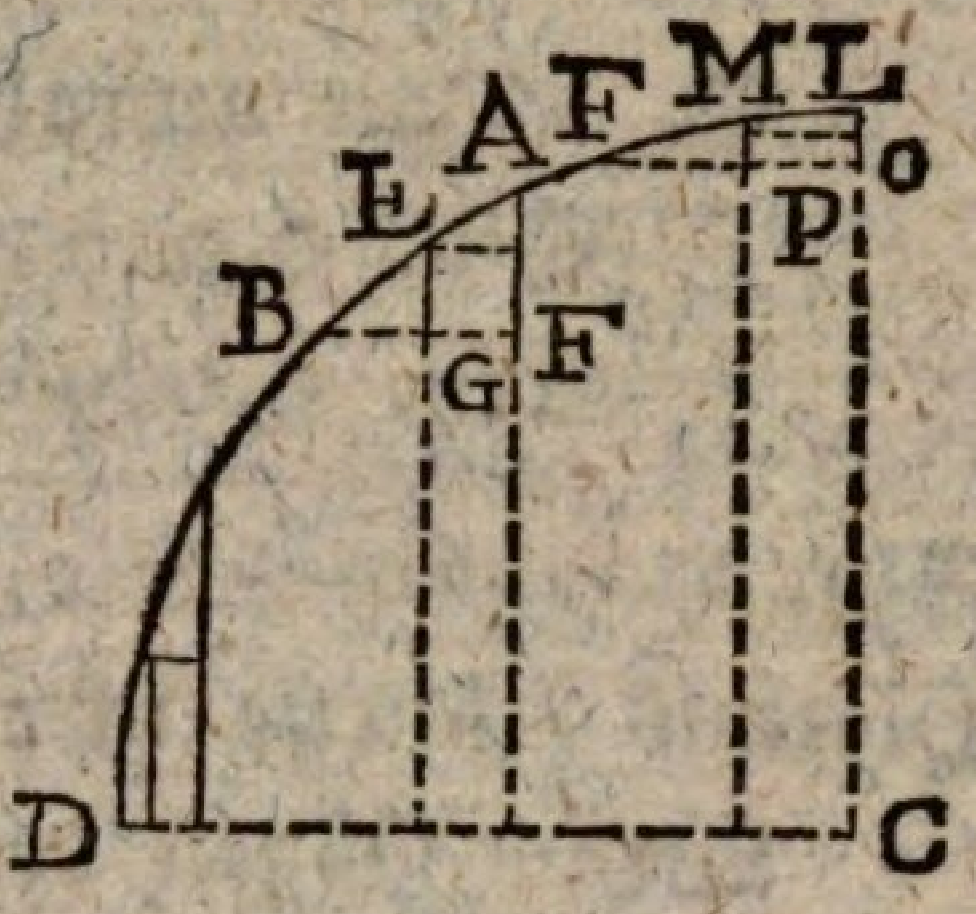
$$60'' \,..\, 2585 = 33'' \,..\, x$$
$$x = (2585 \times 33) : 60 = 1421\tfrac{3}{4}$$

C

$$\text{Sin. } 27^\circ\ 18' = 4586495$$
$$33'' = 1422$$
$$\text{Sin. } 27^\circ\ 18'\ 33'' = 4587917$$

L. Man könte fragen: Warum verfährt man

hier nicht, wie § 80? Das heisst, warum nimt man nicht den Zuwachs der Bögen für den Zuwachs der Anwüchse gleich an?



S. Das kömt daher, weil die ersten Sinusse, zunächst an D, sich fast gar nicht von ihren Bögen unterscheiden, und mit ihnen fast gleichsam wachsen; die Anwüchse EG, AF aber sich schon stark von ihren Bögen EB, AF unterscheiden; am mehresten aber die Anwüchse MP, LO von ihren Bögen NM, NL.

L. Die Sinusse also wachsen nicht in eben dem Verhältnisse wie ihre Bögen. Anfangs sind die Sinusse und ihre Bögen fast einander gleich (§ 90); je mehr sie sich aber dem Quadranten nähern, je ungleicher werden sie, weil die Bögen stärker zunehmen als ihre Sinusse. Daher sind die Unterschiede der TafelSinusse für eine Minute zu Anfange 2909, in der Mitte 2056, und am Ende nur 1.

§. 92.

L. Wir wollen die vorige Aufgabe auch nach der DecimalTeilung auflösen. Gesetzt man hätte die Sinusse nur für ZehntausendTeile des Quadranten, und verlangte HunderttausendTeile? Es würde z. B. gegeben:

Sin. 0,0295 ◺ = 0,0463219,

Sin. 0,0296 ◺ = 0,0464788;

und man verlangte den Sinus von 0,02955?

S. Dan verfahre ich so:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sin. } 0{,}02950 \,\text{D} = 0{,}0463219 \\ \text{Sin. } 0{,}02960 \,\text{D} = 0{,}0464788\end{array}\right\} \text{(A. § 230)}$$

$$\text{Sin. } 0{,}02960 - \text{Sin. } 0{,}02950 = 1569$$

Hieraus schliesse ich:

Wenn Bögen deren Unterschied $= \frac{10}{1000000}$
einen SinusUnterschied geben $= 1569$
so geben Bögen, deren Unterschied $= \frac{5}{1000000}$
einen SinusUnterschied $= 1569 : 2 = 784\frac{1}{2}$

Oder:

$$10 \,..\, 1569 = 5 \,..\, Z$$

$$Z = \frac{1569 \times 5}{10} = 1569 : 2 = 784 + \tfrac{1}{2}$$

Und nun addire ich:

$$\begin{array}{r}\text{Sin. } 0{,}02950 = 0{,}0463219 \\ Z = \quad 784 + \tfrac{1}{2} \\ \hline \text{Sin. } 0{,}02955 = 0{,}0464004\end{array}$$

§ 93.

Sieben und zwanzigster Satz.

L. Die vorige Aufgabe umgekehrt: Man hat Tafeln, welche nur bis auf Minuten berechnet sind, und soll einen Sinus, 1081234, = Sin. x Secunden angeben.

S. Ich schreibe aus den Tafeln den nächst grössern und den nächst kleinern Sinus, und suche ihren Unterschied, und durch den Unterschied des gegebenen x, und des nächst kleinern.

$1079994 = \text{Sin. } 6^\circ\ 12'$
$1081234 = \text{Sin. } x$
$1082885 = \text{Sin. } 6^\circ\ 13'$
$2891 = \text{Sin. } 6^\circ\ 13' - (\text{Sin. } 6^\circ\ 12')$
$1240 = \text{Sin } x - (\text{Sin. } 6^\circ\ 12')$

Nun schliesse ich:

Der Unterschied 2891
verhält sich zu 60'' Secunden,
wie der Unterschied 1240
zu der vierten ProportionsZahl Z.

Oder:

$2891 \,..\, 60'' = 1240 \,..\, Z$

$$Z = \frac{1240 \times 60}{2891} = 74400 : 2891 = (25\tfrac{2125}{2891})$$

Also:

$1081234 = \text{Sin. } 6^\circ\ 12'\ 26''.$

* §. 94.

L. Nun diese Aufgabe auch nach der Decimal-Einteilung! — Es wird gegeben ein Sinus, (es mag hier der vorige, 1081234 seyn); die Tafeln geben ihn nur in ZehntausendTeilen des Quadranten; man verlangt ihn in Hunderttausend-Teilen.

S. $1080167 = \text{Sin. } 0{,}06890$
$1081234 = \text{Sin. } x$
$1081729 = \text{Sin. } 0{,}06900$
$1562 = \text{Sin. } 0{,}06900 - \text{Sin. } 0{,}06890$
$1067 = \text{Sin. } x - \text{Sin. } 0{,}06890$

$1562 \,..\, 10 = 1067 \,..\, Z$

$Z = 10670 : 1562 = 6{,}8$ = =

Es ist also:

1081234 = Sin. 0,06897.

L. Zur Uebung wollen wir die vorhin gefundenen 6° 12′ 26″ (§ 91) in DecimalTeile verwandeln, um zu sehen, ob sie mit der hier gefundenen Zahl übereinstimmen.

S. 6° = 0,0666666 ◻ }
12′ = 0,0022222 ◻ } (§ 84)
26″ = 0,0000802 ◻ }

6° 12′ 26″ = 0,0689690 ◻

§ 95.

Acht und zwanzigster Satz.

L. Welches ist der Sinus von 27 Grad 18 Minuten?

S. Sin. 27° 18′ = 4586495.

L. Wie wird nun der Logarithme dieses Sinus gefunden?

S. Den werde ich suchen müssen, wie in der Arithmetik (§ 346) gelehrt ist.

Log. 4586495 = 6,6614809.

L. So ohngefähr steht er auch in den kleinen Tafeln, nur mit dem Unterschiede, daß die KennZiffer 6 dort 9 ist. Dieses kömt daher, weil in den grossen Tafeln alle trigonometrische Linien auf drei Ziffern weiter berechnet sind, als in den kleinen, und ihre logarithmische KennZiffer folglich um 3 grösser ist (A. § 340). In den kleinern Tafeln nun sind die drei lezten Ziffern der natürlichen Zahlen weggeblieben, aber ihren Logarithmen hat man die KennZiffer der grössern Tafel gelassen. Es ist dieses eine Unschiklich-

keit, welche die mehreste Zeit zwar unschädlich ist, aber doch Anfänger, wenn sie von ihnen aus der Acht gelassen wird, zuweilen verwirren kan, wie wir weiter hin (§ 127) sehen werden. Wir wollen, um uns nach Möglichkeit davor zu verwahren, uns die Sache recht einprägen. — Die natürlichen Sinusse, Tangenten, Secanten, in den kleinen Tafeln, welchem Halbmesser entsprechen sie?

S. Einem von 10000000.

L. Aber ihre Logarithmen sind die für eben den Halbmesser eingerichtet?

S. Nein, die gehören einem von 10000,000000.

L. Welche Aenderung muß man mit ihnen vornehmen, um sie den neben ihnen stehenden natürlichen Zahlen anzupassen?

S. Man muß ihre Kennziffer um 3 vermindern (A. § 340).

L. Und um sie dem Halbmesser 1 anzupassen, was muß da geschehn?

S. Da muß man der Kennziffer 10 abziehn.

L. Aber Log. 27° 18 = 9,6614810.
Hier ist die Kennziffer nur 9, wie kan ich da 10 abziehn?

S. Das geschieht so:

$$\left.\begin{array}{r} 9{,}6614810 - 10 \\ = 0{,}6614810 - 1 \end{array}\right\} \text{(A. § 356).}$$

L. Es versteht sich übrigens von selbst, daß, eben so viel als man einem Logarithmen für den Halbmesser 10000000000 abzieht, um ihn in einen für den Halbmesser 1 zu verwandeln, man auch dem für den Halbmesser 1 addiren muß, um ihn in einen für den Halbmesser 10000000000 zu verwandeln.

§ 96.

L. Wir wissen nun die Logarithmen der Sinusse zu finden; wie werden aber die Tangenten, Secanten und übrigen trigonometrischen Linien gefunden?

S. Auf eben die Art wie die der Sinusse (A. § 346).

L. Sie lassen sich freilich so berechnen; aber bequemer werden sie gefunden durch Hülfe der Tafel § 51. Nach derselben ist die Formel für die Tangente:

Tang. x = r Sin. x : Cos. x.

So ist die Formel für die natürliche Tangente: wie wird sie nun für die künstliche, das heisst, für den Logarithmen der Tangente x aussehn?

S. Log. Tg. x = (Log. r + Log. Sin. x) — Log. Cos. x (A. § 329).

L. Zur Uebung wollen wir, nach dieser Formel, die Logarithmen der Tangente von 27 Grad 18 Minuten suchen.

S. Log. r =	10000000
Log. Sin. 27° 18′ =	9,6614810
	19,6614810
Log. Cos. 27° 18′ =	9,9487147
Log. Tg. 27° 18′ =	9,7127663

§ 97.

Neun und zwanzigster Satz.

L. Nun müssen wir auch lernen den Logarithmen eines in den Tafeln stehenden Sinus zu finden: z. B. die Logarithmen von 27° 18′ 33″.

S. So suche ich erst den natürlichen Sinus:

Sinus 27° 18′ 33″ = 4587917 (§ 91)

und hierauf den künstlichen, oder den Logarithmen.

Log. 4587917 = 6,6616155 (A. § 346).

L. Das Verfahren lässt sich noch abkürzen. Es ist nicht nötig erst den natürlichen Sinus zu suchen; sondern man schliesst so:

60 Secunden verhalten sich
zum LogarithmenUnterschiede des nächst grössern und nächst kleinern Sinus
wie die gegebene SecundenZahl
zum LogarithmenUnterschiede des verlangten Sinus über den nächst kleinern.

Wir wollen diese Berechnung machen, um zu sehn, ob sie mit der vorigen übereinstimmt.

S. Log. Sin. 27° 19′ = 9,6617257
Log. Sin. 27° 18′ = 9,6614810

Log. Sin. 27° 19′ — Log. Sin. 27° 18′ = 2447

60″ .. 2467 = 33″ .. Z

Z = (2447 × 33) : 60 = (2447 × 11) : 20
= 26917 : 20 = $1345\frac{17}{20}$

Log. Sin. 27° 18′ = 9,6614810
Z = 1346

Log. Sin. 27° 18′ 33″ = 9,6616156

* L. Wir wollen auch gleich eine Probe mit der DecimalEinteilung machen, und den in den hobertideserschen Tafeln nicht stehenden Logarithmen des Bogens 0,12354 suchen.

S. Log. 0,1325 = 9,3151957
Log. 0,1326 = 0,3155186

3229

10 .. 3229 = 4 .. 1291

Log. 0,13254 = 9,3151957
+ 1292
= 9,3153249

§ 98.

Dreizigster Satz.

L. Es wird gegeben ein nicht in den Tafeln stehender künstlicher, oder LogarithmenSinus

9,7181325 = Log. Sin. x

man soll den ihm zugehörigen Bogen in Secunden angeben.

S. 9,7180851 = Log. Sin. 31° 30′
9,7181325 = Log. Sin. x
9,7182912 = Log. Sin. 31° 31′

2061 = (L.S. 31° 31′) — (L.S. 31° 30′)
474 = (L. Sin. x) — (L.S. 31° 30′)

2061 .. 60′ = 474 .. $13\frac{1650}{2061}$

Folglich:

Log. Sin. x = 31° 30′ $13\frac{1650}{2061}$.

L. Nun eben diese Rechnung auch nach der DecimalEinteilung! — Es wird verlangt den künstlichen Sinus (9,7181325) in Hunderttausend-Teilen anzugeben.

S. 9,7180851 = Log. Sin. 0,3500
9,7181325 = Log. Sin. x
9,7181964 = Log. Sin. 0,3501

1113 = L. S. 0,3501 — L. S. 0,35
474 = L. S. x — L. S. 0,35

$$1113 \,..\, 10 = 474 \,..\, 4\tfrac{283}{1113}$$

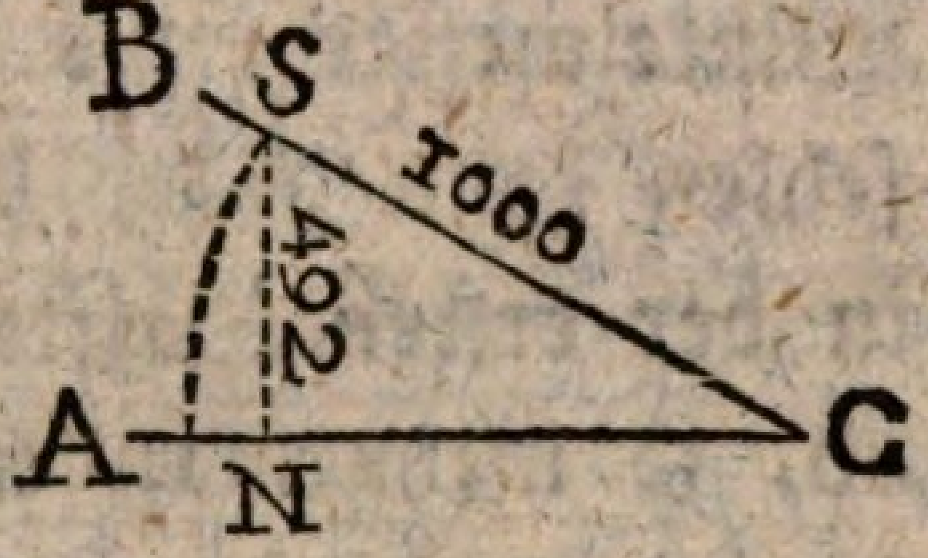
Folglich:

$$\text{Log. Sin. } x = 0{,}35004$$
$$= 31^\circ\ 30'\ 14''\ (\S\ 86.$$

§ 99.

Ein und dreizigster Satz.

L. Es wird gegeben ein beliebiger Winkel ACB, und wird verlangt ihn zu messen, aber ohne Winkelmesser (G. § 222) bloß durch Hülfe des verjüngten MaßStabes (G. § 274) und der trigonometrischen Tafeln. — Vielleicht lehrt das Betrachten der Zeichnung die Auflösung.



L. Auf einen der Schenkel AC, werden, nach einem verjüngten MaßStabe von C nach S, 1000 Teile getragen (G. § 275); und hierauf wird, von S auf AC, eine senkrechte Linie SN gezogen. — Was stellt diese Linie SN vor?

S. Sie ist der Sinus des Bogens SD (§ 1), und des Winkels C (§ 59).

L. Nun ist das fernere Verfahren einleuchtend.

S. Ich messe den Sinus SN nach eben dem MaßStabe, worauf die Tausend genommen sind (hier finde ich 492); suche das gefundene Maß in den SinusTafeln auf; so habe ich das Maß des gegebenen Winkels.

L. Ganz richtig: aber die Sinusse der kleinen Tafeln sind für einen Halbmesser 10,000000 berechnet (§ 82); wir aber haben ihrer nur 1000 angenommen.

S. Weil 1000 vier Nullen weniger enthält als 10,000000; so muß ich von der SinusZahl die vier lezten Ziffern abschneiden: bleibt 492 = Sin. 29° 29′ bis 29° 32′.

L. Um 4 Minuten also sind wir ungewiß. Ein zehntausenteiliger MaßStab würde, wenn er anzubringen wäre, dem Uebel abhelfen. Indessen hat der tausendteilige MaßStab immer noch Vorzüge vor dem Winkelmesser, wo man leicht um 15 bis 20 Minuten fehlen kan. Aber diese grössere Genauigkeit findet nur in der ersten Hälfte des Quadranten Stat; und nimt ab, je mehr man sich dem ViertelKreise nähert. Z. B. bei 45 Grad haben schon fünf Sinusse die drei höchsten Ziffern einander gleich; bei 60 Grad schon sieben; bei 70 Grad zehen; bei 80 Grad zwanzig u. s. w. Von hier an bis 90° oder 100° ist diese Messung also anwendbar. — Doch wir müssen noch sehen, welchem Bogen, nach der DecimalEinteilung, die SinusZahl 492 entspricht.

S. 492 = Sin. 0,3275 bis 0,3281 ◻.

L. Hier schwankt es also zwischen sechs ZehntausendTeilen. Uebrigens ist 0,3277 ◻ = 29° 30′ (§ 85. 86).

§ 100.

L. Anstat des Sinus SN, könte man auch den Cosinus messen. Welcher ist das?

S. Cosinus ACB = NC (§ 15) = 870.

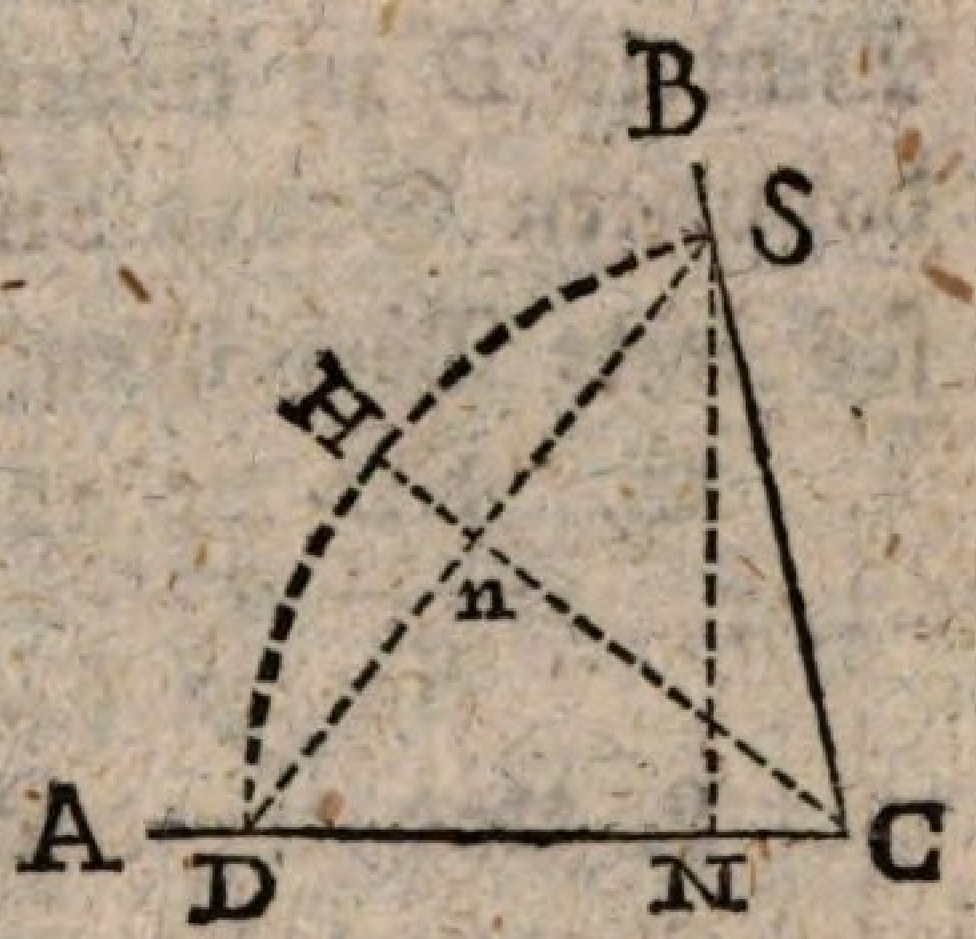
L. Recht! Und schlägt man diesen in den Tafeln auf, so findet man daneben dessen Sinus mit dem ihm zugehörigen Winkel (§ 82).

492 = Sin. 29° 29′ bis 29° 32′.

Bei Winkeln über 45 Grad ist es immer ratsam den Cosinus zu messen: überhaupt von Sinus und Cosinus den kleinern zu wählen, weil bei dies m die Ungewißheit geringer ist als bei dem grössern (§ 99).

§ 101.

L. Es wird wiederum ein Winkel ACB von ohngefähr 80 Grad zu messen verlangt. Wir verfahren genau wie vorhin (§ 98), tragen nach einem verjüngten MaßStabe 1000 von C bis S, ziehn den Sinus SN, messen ihn, und finden ihn = = ?



S. SN = 984.

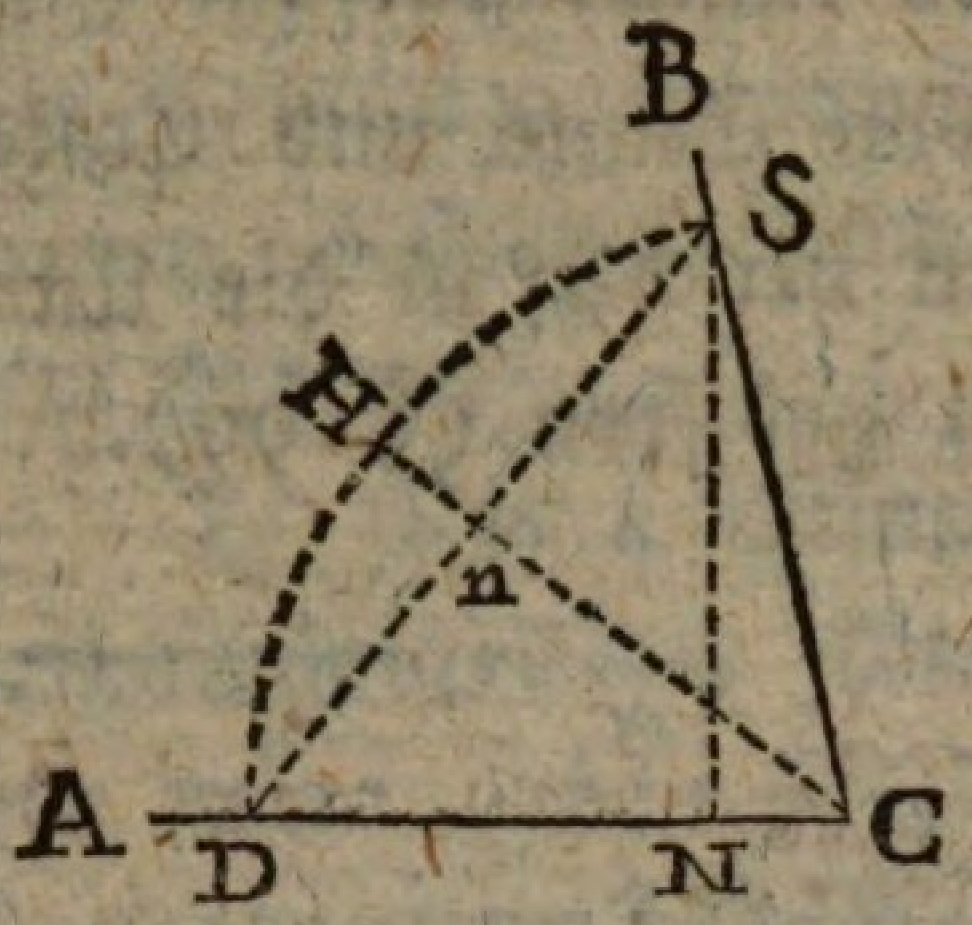
L. Suchen einen Sinus mit diesen Anfangs-Ziffern in den Tafeln auf, und sehn, welchem Winkel er gehört.

S. 984 = Sin. 79° 45′ und Sin. 80° 3′.

L. Zwischen 19 Minuten bin ich ungewiß. — Wir wollen auch diesen Cosinus messen, und sehen was der gibt.

S. Cos. ACB = NC = 173 = Cos. 79° 59′ = = 80° 3′

L. Da sind wir nun zwischen 5 Minuten in Zweifel. — Nun wollen wir eine dritte VerfahrungsArt versuchen, und sehn, welches Resultat dis geben wird. Wir zeichnen einen Bogen SD, und ziehn dessen Sehne SD. Hierauf halben wir den Bogen SD in H (G. § 208), und ziehn den Halbmesser CH, welcher zugleich die Sehne SD in n halbt, und senkrecht auf ihr steht. —



Was für Linien sind nun Sn und Dn, in Hinsicht auf die Winkel BCH und ACH?

S. Sn ist Sinus des Winkels BCH, und Dn ist Sinus des Winkels ACH (§ 1).

L. Da nun DnS = Sn + Dn = 2 Snd; so kan ich, um die Grösse des Winkels B zu finden, seinen Sinus Sn, oder seinen doppelten Sinus SnD, messen, und ihn halben. Dieses lezte Verfahren ist vorzuziehn.

S. SD = 1286

Sn = 643 = Sin. 40° 1′ : : 40° 5′.

L. Und der doppelte Winkel ACB?

S. ∠ ACB = 2 ACH = 80° 2′ : : 80° 10′.

L. Hier sind wir doch nur zwischen 8 Minuten ungewiß, da wir es bei der Messung des Sinus SN zwischen 19 Minuten waren. Dieses lezte Verfahren hat also offenbare Vorzüge vor den ersten, sonderlich bei etwas grossen Winkeln. — Am genauesten aber scheint das zweite Verfahren, das Messen des Cosinus, zum Ziele zu führen, wenn beim Ziehn des Sinus SN, und beim Messen kein Fehler vorgeht; denn so richtig das Ziehn senkrechter Linien in der Theorie ist, so leicht wird in der Ausübung dabei gefehlt. Dieser Umstand sezt die zweite VerfahrungsArt wieder etwas herab, und verschafft der dritten den Vorzug. — Nun haben wir den Winkel ACB noch nach der DecimalEinteilung zu suchen.

S. 643 = Sin. 4447 : : 4454 ◺

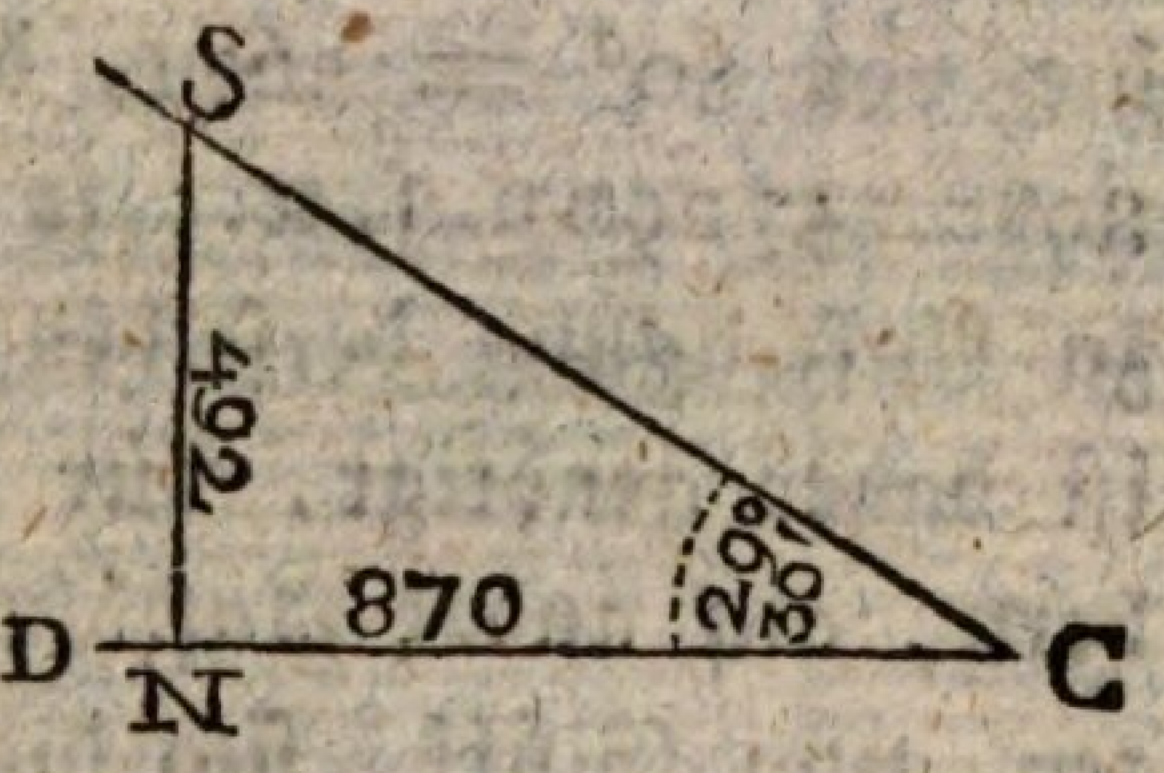
∠ ACB = 8894 : : 8908 ◺

§ 102.

Zwei und dreizigster Saz.

L. Wir wissen jezt Winkel mittels der Tafeln zu messen: wie wird aber ein in Graden und Minuten gegebener Winkel durch Hülfe des verjüngten MaßStabes und der Tafeln aufgetragen?

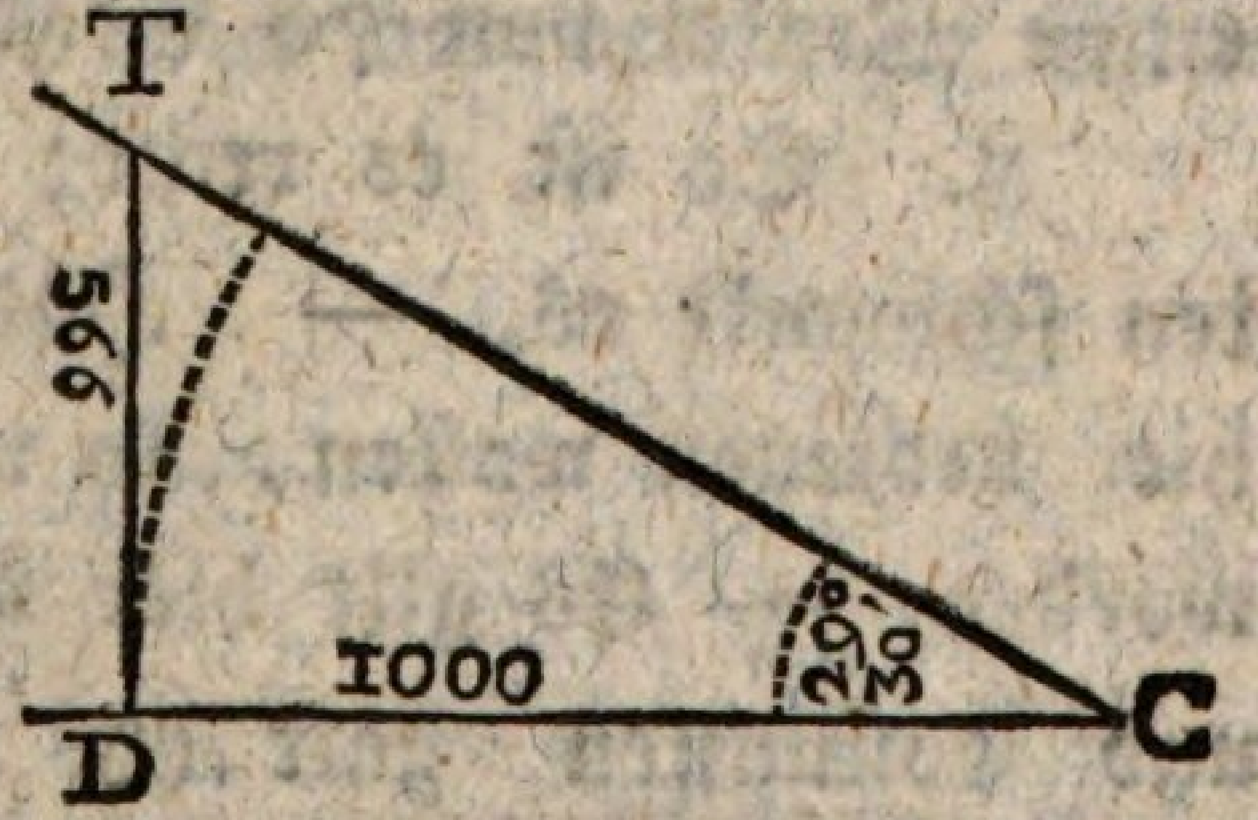
Der Winkel soll bei C auf die Linie CD getragen werden, 29° 30′ seyn.



S. Ich suche in den Tafeln seinen Sinus und Cosinus auf; trage den Cosinus, 870, von C nach N; errichte in N eine senkrechte Linie; trage auf diese von N bis S den Sinus, 492, und ziehe die Linie CS: so ist SCN der verlangte Winkel.

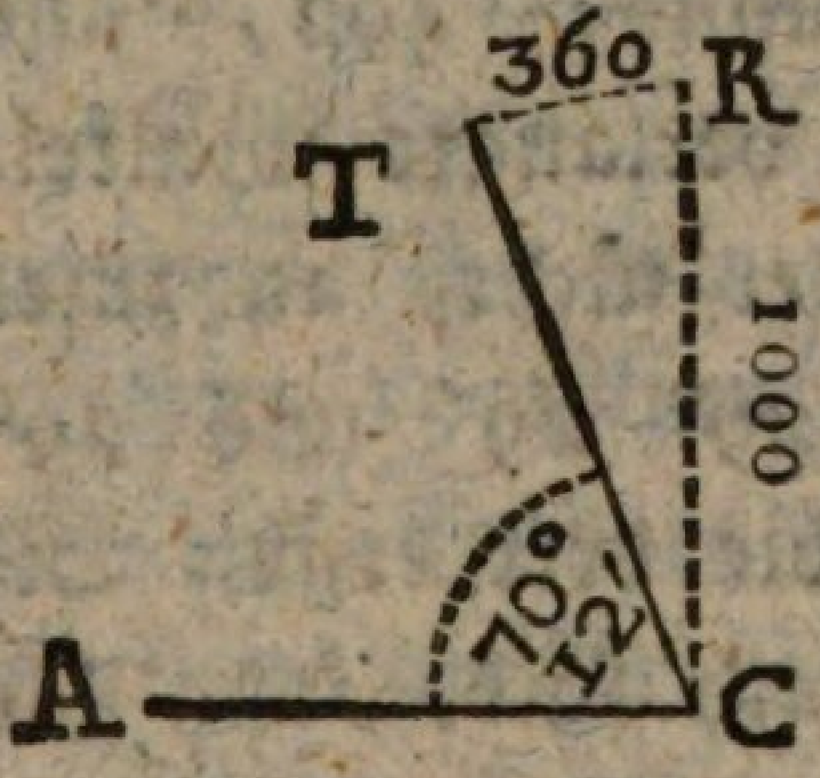
L. An der Auflösung ist weiter nichts auszusezen als das Schwanken zwischen 29° 29′ und 29° 32′, weil in diesen vier Winkeln die drei ersten Sinus- und CosinusZiffern einander gleich sind. Da die Tangenten schneller wachsen als die Sinusse, so bedient man sich derselben, wo es angeht, lieber. Die Frage ist, wie man dabei verfährt? — Wie wird der Winkel von 30° 30′, mittels der Tangenten, aufgetragen?

S. Ich trage von C bis D 1000 für den Halbmesser, errichte in D eine senkrechte Linie, und trage auf diese, von D nach T, die Länge der Tangente des gegebenen Winkels, 565, und ziehe CT; so ist TCD der verlangte Winkel von 29° 30′



§ 103.

L. Die Tangente von 45 Grad ist dem Halbmesser gleich (§ 30); bis dahin also geht es gut, auch noch etwas weiter, denn man kan ja der Länge seines MaßStabes einige hundert, allenfalls tausend zusetzen; aber auf die Länge reicht man nicht aus, denn die Tangente von 60° ist 1732, die von 70° = 2747, die von 80° = 5671, die von 85° = 11430, die von 89° = 57290 u. s. w.; so daß weiterhin kein MaßStab zu Auftragung derselben klein genug seyn kan. Man ist daher genötigt, für Winkel, die sich 90 Grad nähern, auf andre Auflösungen zu denken; und da bieten, zum Glükk, sich die Cotangenten dar, welche abnehmen, so wie die Tangenten zunehmen. Wir wollen also mit Hülfe der Cotangente, bei C einen Winkel von 70 Grad 12 Minuten auftragen. Wie wird da zu verfahren seyn?



S. Ich errichte in C eine senkrechte Linie CR = 1000, welche den Halbmesser vorstellt; und in R eine andre senkrechte RT = 360, welche die Cotangente 70° 12′ vorstellt: und hierauf die Linie CT, welche mit AC einen Winkel von 70 Grad 12 Minuten macht.

L. So ist es recht; und nur zwischen 3 Minuten schwankt es. — Hätte man sich der Tangente hier bedienen wollen, so wäre eine von 2777 erfodert worden. — Es gilt hier übrigens, was von Sinussen und Cosinussen galt (§ 100): Bei Winkeln unter 45 Grad bedient man sich der Tangenten, bei Winkeln über 45 Grad der Cotangenten.

§ 104.

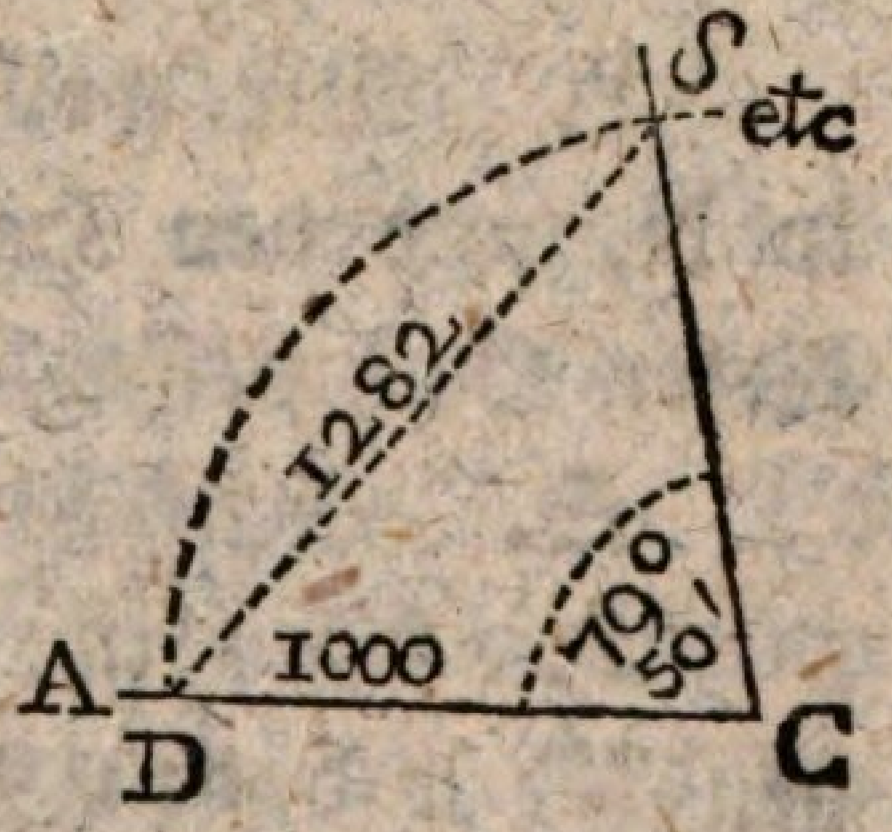
L. Die Auflösung der beiden vorigen Paragraphen war nur auf spitze Winkel anwendbar: wie wird man stumpfe Winkel auftragen? Z. B. einen von 146 Grad 36 Minuten?

S. Da sehe ich zweierlei Mittel. Ich darf nur $(146^\circ\ 36') - 90^\circ = 56^\circ\ 36'$ auftragen, und einen rechten Winkel hinzutuhn. Oder kürzer: Ich trage den NebenWinkel des verlangten Winkels auf (hier $33^\circ\ 24'$): so habe ich daneben den gegebenen.

§ 105.

L. Noch ein bequemeres Mittel zu Auftragung eines spitzen Winkels kan die Zeichnung § 99 an die Hand geben. Es wäre z. B. auf AC, an C, ein Winkel x von 79 Grad 50 Minuten zu legen?

S. So beschreibe ich aus C, mit dem Halbmesser 1000, einen Bogen Detc; trage auf solchen 2 Sin. $\frac{x}{2}$, das ist hier 2 Sin. $\frac{79^\circ\ 50'}{2} = 2\ (\text{Sin. } 39^\circ\ 55') = 2 \times 641 = 1282$, von D bis S, und ziehe CS: so ist ACS der verlangte Winkel x.



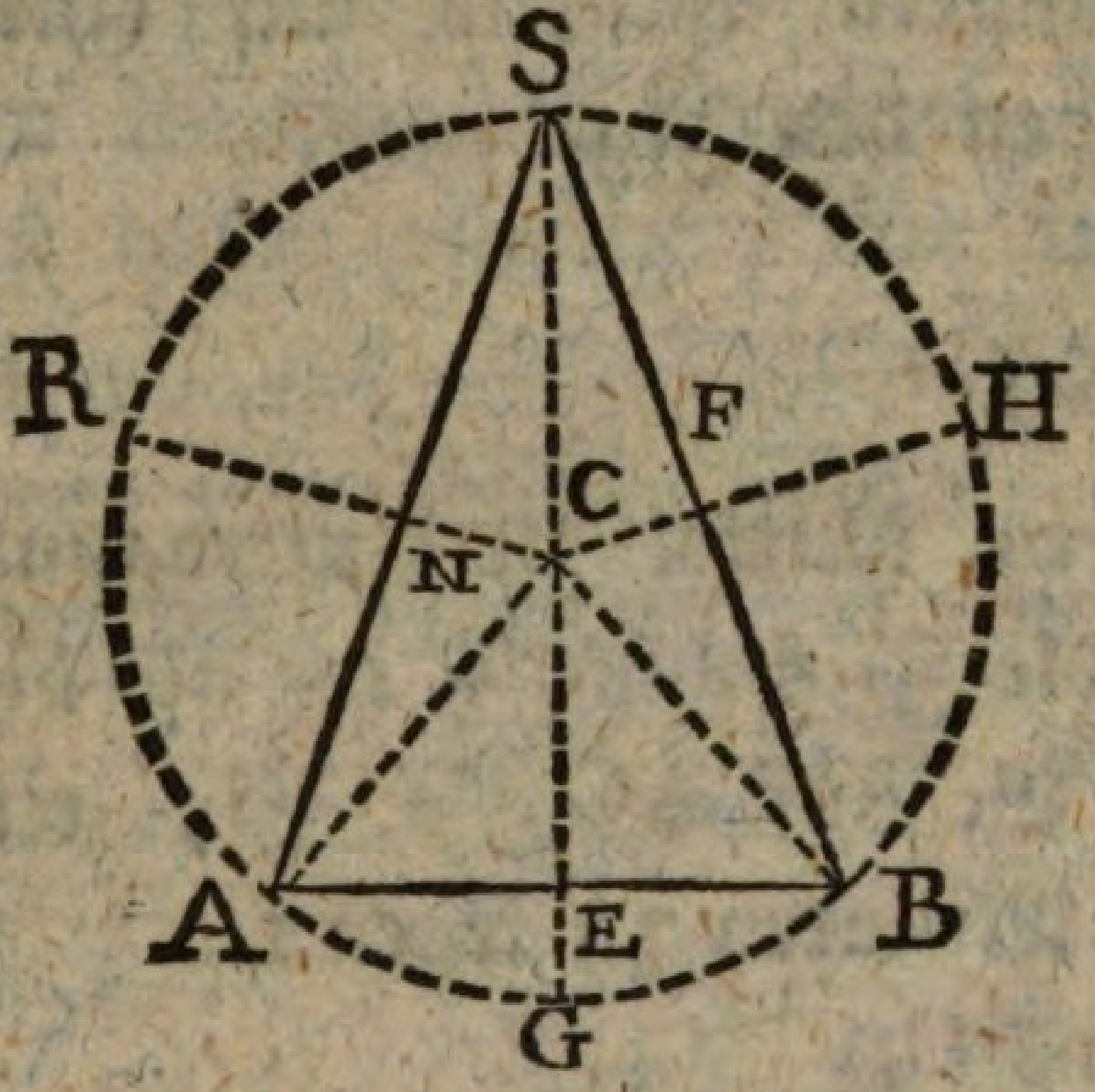
IV.

Trigonometrische Auflösung der Dreiekke.

---

§ 106.

Drei und dreizigster Satz.



L. Es wird ein willkührliches Dreiekk SAB gezeichnet, und um dasselbe ein Kreis (G. § 175). — Was sind nun die DreiekksSeiten in Hinsicht auf den Kreis?

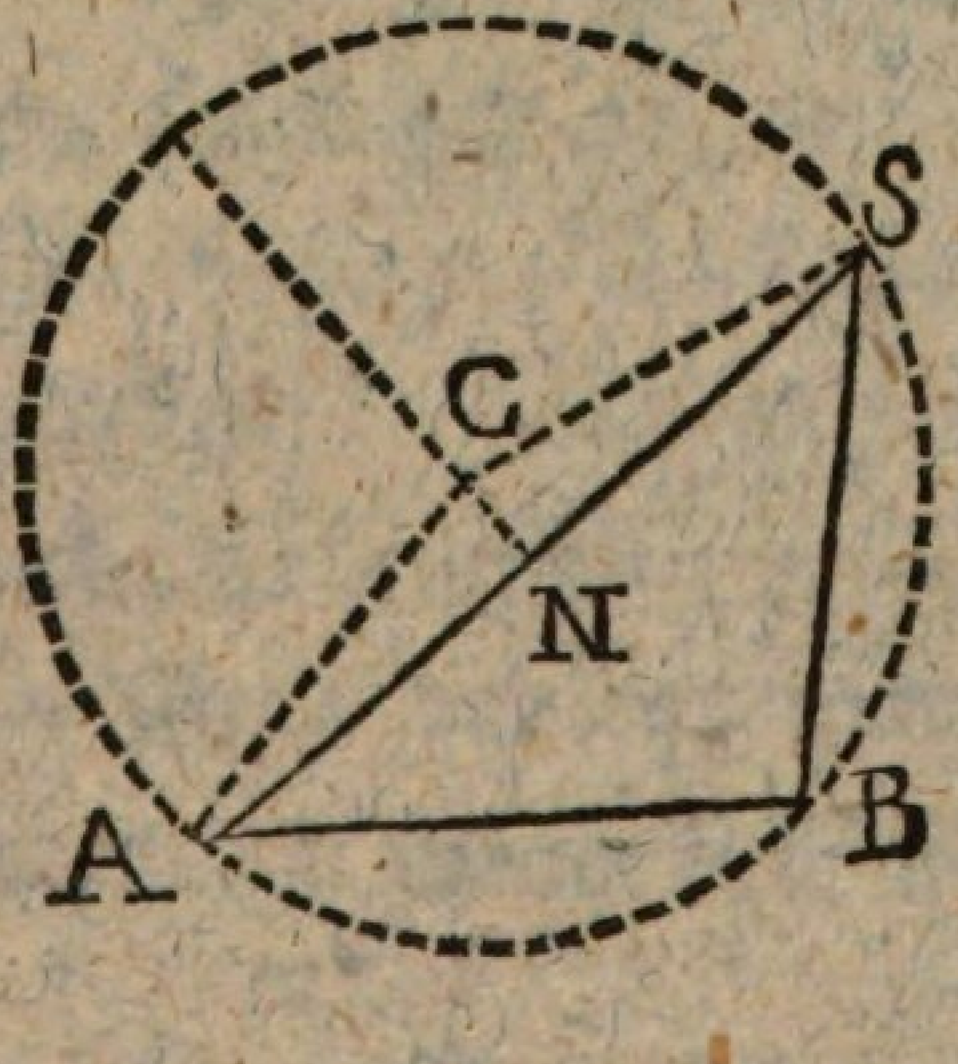
S. Sie sind Sehnen desselben (G. § 170).

L. Wir wollen nun diese Sehnen, SA, halben in N, und den Halbmesser CNR ziehn. — Wie steht dieser Halbmesser auf der Sehne?

S. Senkrecht (G. § 176).

L. Was ist nun SN, in Hinsicht auf den Bogen SR und den Winkel SCR?

S. SN ist Sinus des Bogens SR (§ 1) und des Winkels SCR (§ 59).



L. Welcher von den Winkeln SCR und ACR ist der gröste?

S. Bogen SR = Bogen AR (G. § 220)
folglich ∠ SCR = ∠ ACR (G. § 220).

L. Und der Winkel B, wie groß ist der?

S. ∠ B = ∠ SCR = ∠ ACR.

L. Da nun gleiche Winkel auch gleiche Sinusse haben; so folgt daraus = = ?

S. Daß Sinus ∠ SCR = SN = Sinus B.

L. Wenn man nun mit den andern Seiten AB, SB, eben so verfährt; so ergibt sich = = ?

S. Daß Sin. ACE = AE = Sin. S
und Sin. SCH = SF = Sin. A.

L. Und nun dieses Alles zusammen gefasst, würde lauten = = ?

S. In jedem Dreiekke ist die Hälfte jeder Seite der Sinus ihres GegenWinkels.

L. Bei jeder trigonometrischen Linie muß doch ein bestimmter Halbmesser zum Grunde liegen (§ 60). Welches ist hier der dem Sinus entsprechende Halbmesser?

S. Der mit welchem der Kreis um das Dreiekk gezogen ist: CH = CG = CR (§ 1).

L. Hier fält es in die Augen: aber würde das auch der Fall seyn, wenn die punktirten Linien weggelassen wären, wie in andern LehrBüchern? — Es sei Halbmesser CR = 1000, und nach eben diesem MaßStabe SN = 955; wie groß würde dan der gegenüber stehende Winkel B seyn?

S. Dan fiele B zwischen 72° 45′, und 72° 56′.

L. Wohl zu merken jedoch, wenn ∠ SCR spitz ist, wie hier. Gesetzt aber er wäre stumpf?

S. Dan fiele er zwischen 108° 4′ und 108° 15′ (§ 11).

§ 107.

L. Da $\left.\begin{aligned} SN &= \tfrac{1}{2}\, SA \\ AE &= \tfrac{1}{2}\, AB \\ SF &= \tfrac{1}{2}\, SB \end{aligned}\right\}$ (§ 106)

ſo iſt

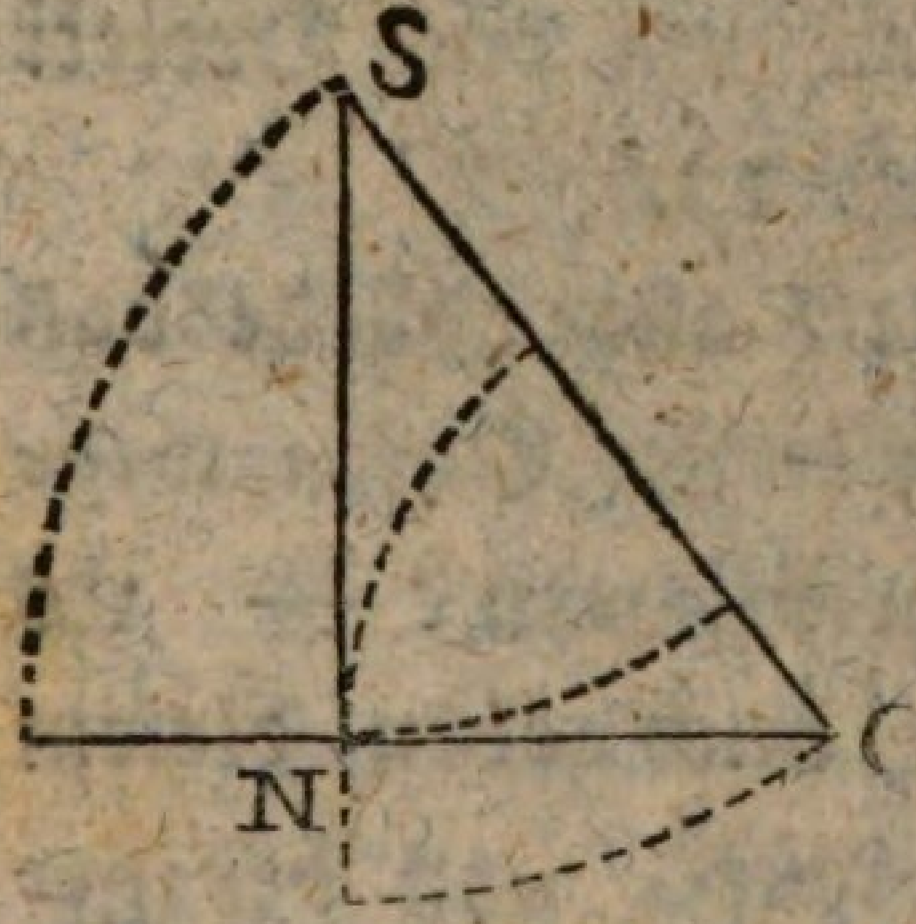
$$\left.\begin{aligned} SA \,..\, AB &= SN \,..\, AE \\ \text{und } AB \,..\, BS &= AE \,..\, BF \end{aligned}\right\} \text{(A. § 106)}$$

Oder trigonometriſch ausgedrükkt?

S. $\left.\begin{aligned} SA \,..\, AB &= \text{Sin. } B \,..\, \text{Sin. } S \\ AB \,..\, BS &= \text{Sin. } S \,..\, \text{Sin. } A \end{aligned}\right\}$ (§ 106).

Das heiſſt: In jedem Dreiekke verhalten ſich die Seiten zu einander wie ihre Hälften. Das iſt: wie die Sinuſſe der ihnen gegenüber liegenden Winkel.

§ 108.



L. Was von allen Dreiekken gilt (§ 107), das gilt auch von den rechtwinkligen. Man nehme in einem rechtwinkligen Dreiekke SNC die längſte Seite SC für den Halbmeſſer; ſo iſt der Sinus des Winkels C = = ?

S. Sinus C = SN (§ 1. 59).

L. Und der Coſinus?

S. Coſinus C = CN (§ 15. 59).

L. Oder auch CN = Sinus S, und SN = Coſinus S (§ 16). — Nimt man aber CN für den Halbmeſſer an, was iſt dan SN?

S. Iſt CN = r, ſo iſt SN = Tangente C (§ 29) = Cotangente S (§ 43).

L. Und CS?

S. Ist SN Tangente, so ist CS Secante des Winkels C (§ 29), und Cosecante des Winkels S (§ 43).

L. Und ist SN der Halbmesser : : ?

S. So ist CN Tangente des Winkels S, und Cotangente des Winkels C, und CS Secante des Winkels S, und Cosecante des Winkels C.

L. Also wenn man im rechtwinkligen Dreiekk die långste Seite zum Halbmesser oder Sinus totus nimt, so sind die kürzern Sinus und Cosinus; nimt man aber eine der kürzern für den Sinus totus : : ?

S. So sind die beiden andern Tangente und Cotangente, Secante und Cosecante.

L. Wohl zu merken: des Winkels, aus dessen Spitze, und für den Halbmesser, mit welchem der Kreis beschrieben ist. Man muß sich vorsehen, diese trigonometrische Linien, für diesen Halbmesser, nicht mit den für einen bestimmten TafelHalbmesser berechneten TafelLinien zu verwechseln (§ 84), die nur unter der Bedingung für einerlei Winkel einander gleich seyn können; wenn der Halbmesser hier in eben so viel gleiche Teile geteilt angenommen wird, als der TafelHalbmesser (§ 60)

§ 109.

Erklårung.

Auf diesen LehrSåtzen (§ 107. 108) beruht das

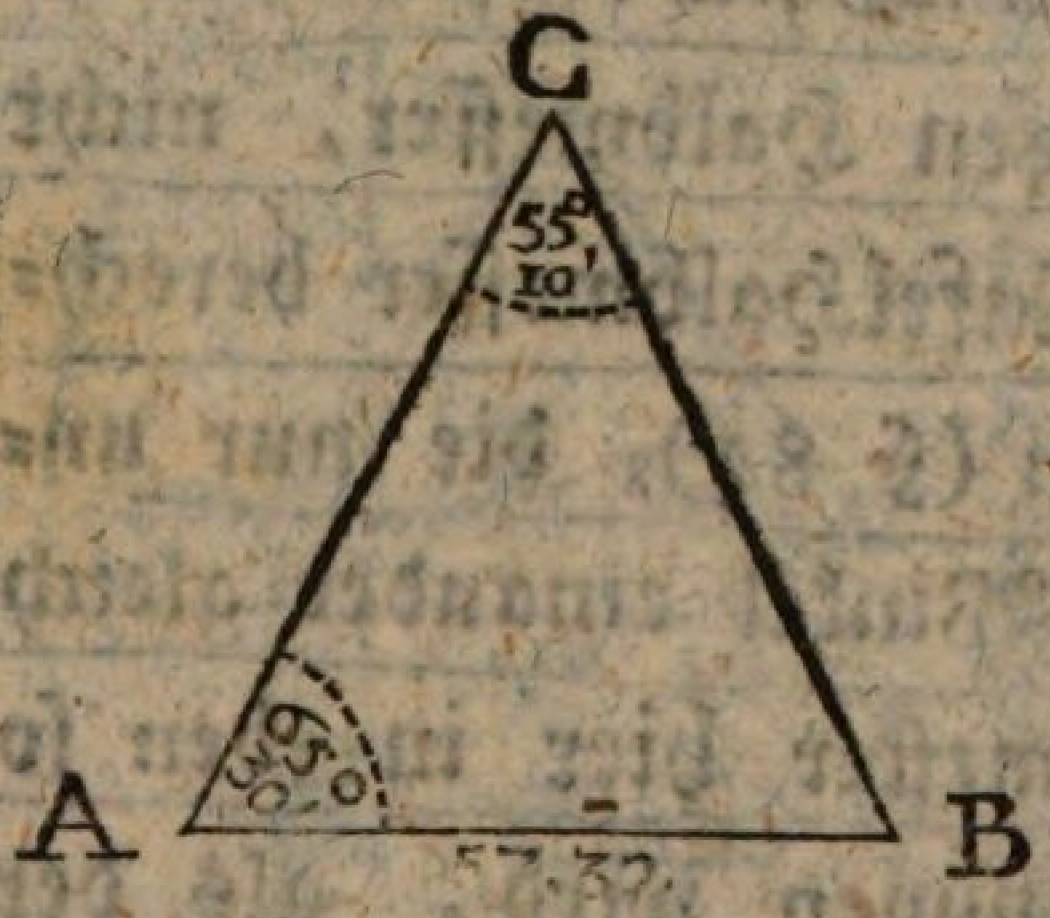
Verfahren jedes Dreiekk trigonometrisch aufzulösen: das heisst: Wenn drei Dinge gegeben sind, die übrigen durch Rechnung zu finden. Doch muß unter den gegebenen Dingen immer wenigstens eine Seite seyn. Und woher das?

S. Weil drei Winkel bloß Aehnlichkeit begründen (G. § 258), aber nicht Gleichheit (G. § 97).

L. Recht! Aus den drei Winkeln eines Dreiekks lässt sich zwar das Verhältniß der Seiten zu einander bestimmen, aber nicht ihre Grösse. Zu trigonometrischer Berechnung der Dreiekke werden eben die Stükke erfodert, welche zu geometrischer Zeichnung, oder Begründung der GleichAehnlichkeit erfodert werden (G. § 97).

§ 110.

Vier und dreizigster Satz.



L. In einem Dreiekke ABC sind zwei Winkel bekant: nämlich

A = 65° 30′
C = 55° 10′

wie groß ist der dritte Winkel B?

S. A + C = 120° 40′

B = 180° — 120° 30′ (G. § 121) = 59° 20′.

L. Gesetzt es würde auch eine Seite

AB = 57,32

gegeben: liesse sich dan wol eine andre Seite BC finden?

S. O ja: denn es ist

Sinus C .. AB = Sinus A .. BC (§ 107)

Oder:

Sinus 55° 10′ .. 57,32 = Sinus 65° 30′ . . BC

Das ist:

$$8208170 \;..\; 57{,}32 = 9099613 \;..\; \frac{57{,}32 \times 9099613}{8208170}$$

BC = 63,545201 : :

L. Die Kunst in Anordnung der Sätze besteht darin, immer einen Sinus und eine Seite mit einander in Verhältniß zu bringen, und zwar zuerst die gegebene Seite mit ihrem Sinus, und zulezt die gesuchte mit dem ihrigen, und zwar so, daß die Sinusse das Vorder-, und die Seiten das HinterGlied machen. Man kan aber auch die Proportion so ordnen, daß Sinus und Sinus, Linie und Linie ein Verhältniß ausmachen:

Sinus C .. Sinus A = AB .. BC (A. § 286)

Nun wollen wir eben diese Rechnung auch mit Logarithmen anstellen, und zwar nach den grossen Tafeln.

S. Log. Sin. C = Log. 55° 10 = 9,9142463650

Log. AC = Log. 57,32 = 1,7583061817

Log. Sin. A = Log. 65° 30′ = 9,9590229086

Log. AC + Log. Sin. A = 11,7173290903

Log. BC = 63,54519 : : = 1,8030827253

L. Die kleinern Tafeln geben den lezten Logarithmen

1,8030872 = Log. 63,54585

Das war die Seite BC: nun wollen wir, zur Uebung, auch die Seite AC suchen, und wieder auf beiderlei Art.

S. Sin. 55° 10′ .. 57,32 = Sin. 59° 20′ .. AC

Das ist:

$$8208170 \;..\; 57{,}32 = 8601491 \;..\; \frac{57{,}32 \times 860491}{8208170}$$

AC = 60,06667 = =

L. Nun durch Logarithmen!

S. Log. Sin. C = Log. 55° 10′ = 9,9142463650

Log. AB = Log. 57.32 = 1,7583061817

Log. Sin. B = Log. 59° 20′ = 9,9345737634

11,6928799451

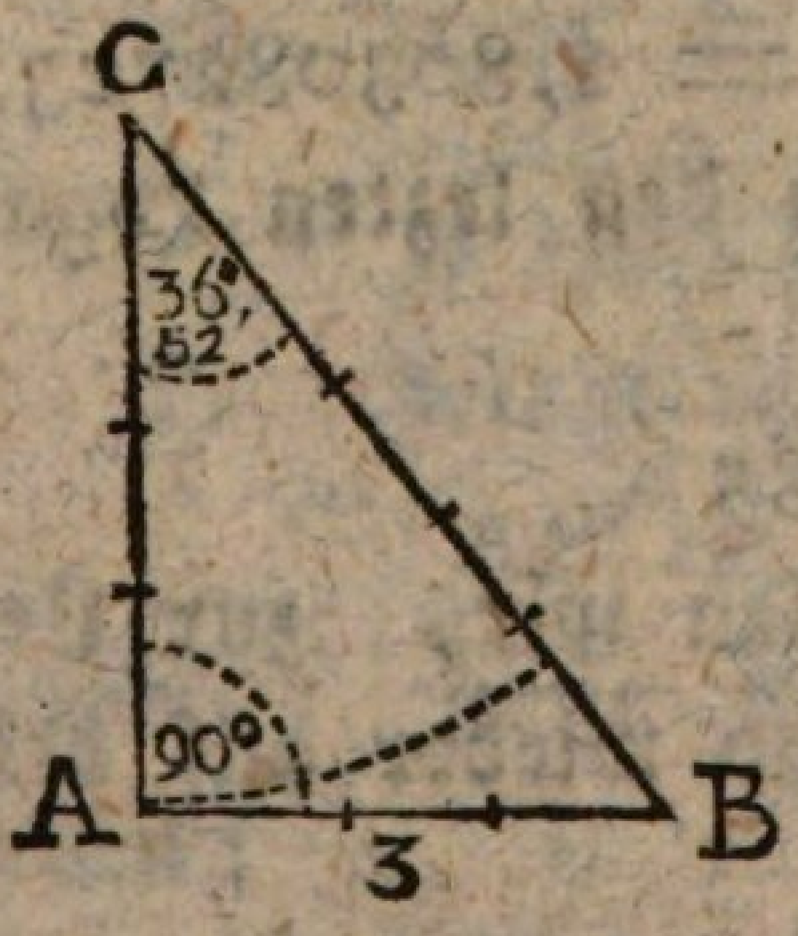
Log AC = 60,06667 = 1,7786335801

L. Die kleinen Tafeln geben 1,7786336 = Log. 60,06667 = =

§ 111.

Die Exempel des vorigen Paragraphs können zugleich zur Prüfung der LogarithmenRechnung dienen. Vergleicht man nämlich die aus beiderlei Rechnungen entstehenden Ergebnisse mit einander, so findet sich, daß in der ersten Rechnung fünf, in der lezten sieben Ziffern übereinstimmen, und das, man mag sich der grossen oder der kleinen Tafeln bedienen, und daher wollen wir künftig bei diesen lezten bleiben.

§ 112.



L. Nun wollen wir auch ein rechtwinkliges Dreiekk bezeichnen. Es werden gegeben

A = 90°

C = 36° 52′ 12″

GrundLinie AB = 3

wie groß ist die längste Seite BC? —

Wir wollen die Rechnung zuerst nach § 110 anstellen und zwar mit natürlichen Zahlen.

S. Es verhält sich

Sin. C = Sin. 36° 52′ 12″ = 6000014
zu AB = 3
wie Sin. A = Sin. 90° = 10000000
zu BC = 30000000 : 6000014 (A. § 294)
= 4,999988 = =

L. Das war die Rechnung wie sie für jedes Dreiekk passt: wenn man aber das Dreiekk ABC als ein rechtwinkliges betrachtet, und AC für den Halbmesser annimt, was ist dan AB und BC?

S. Dan ist AB die Tangente, und BC die Secante (§ 108).

L. Nun gibt es für jeden Bogen und Winkel so viel trigonometrische Linien jeder Art, als es Halbmesser gibt (§ 60), welche aber zu einander in eben dem Verhältnisse stehn, als ihre Halbmesser gegen einander (§ 58). — Wer das verstanden hat, der wird nun wissen, die Seiten AB und BC, als Tangenten und Secanten des Winkels C, und des Halbmessers AC zu berechnen.

S. Es verhält sich

die TafelTangente von 36° 52′ 12″ = 0,7500028
zur TafelSecante = = = 1,2500016
wie die Tangente AB = 3
zur Secante BC = (12500016 × 3) : 7500028
= 37500048 : 7500028
= 4,999987 = =

L. Eigentlich solte BC = 5 seyn (G. § 165), daß wir diese Zahl nicht genau erhalten, kömt daher, daß wir den Winkel C, der eigentlich nur 36° 52′

11″ 38‴ beträgt, 36° 52′ 12″, und also etwas zu groß angenommen haben. Die erste Rechnung kömt der Wahrheit nicht nur etwas näher, sondern ist auch leichter, welches beides seinen Grund darin hat, daß wir uns da des Halbmessers, oder Sinus totus, bedient haben. Dieses muß man daher, wo die Umstände es gestatten, stets beobachten.

§ 113.

Ist eine trigonometrische TafelZahl zu groß; so sucht man wohl die lezte Ziffer wegzulassen, oder in 0 zu verwandeln: ist sie aber zu klein; so läßt man gleichfalls die lezte Ziffer weg, vermehrt aber die nächst vorhergehende um 1. Hätten wir die erste dieser Regeln bei der ersten Rechnung des vorigen §s befolgt, und 6000014 in 6000010 verwandelt; so hätten wir BC = 4,9999916 ⸗ ⸗ erhalten, welches der Wahrheit näher kömt als 4,999988 ⸗ ⸗. Verwandelt man aber in der zweiten Rechnung

die zu grosse Tangente 7500028
in 7500020
und die zu grosse Secante 12500016
in 12500010

und rechnet man hernach weiter, was erhält man?

S. Sec. BC = (1250001 × 3) : 750002
= 3750003 : 750002
= 4,9999980 ⸗ ⸗

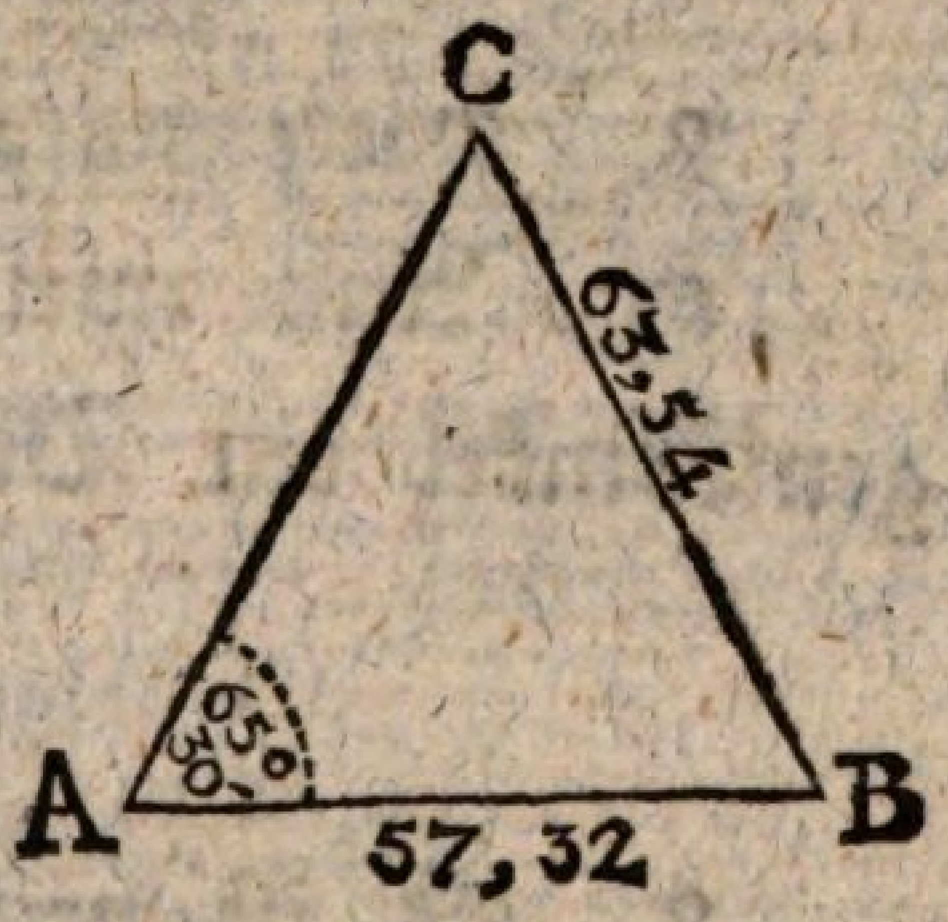
L. Welches der Wahrheit wieder ansehnlich näher kömt als 4,999987 ⸗ ⸗. Nimt man

TafelTangente C = 7500000,
und TafelSecante C = 12500000;
so ist BC = (125 × 3) : 75
= 375 : 75
= 5, die richtige Zahl:

woraus erhellt, daß die hier angenommene Tangente und Secante die wahren sind (§ 120).

§ 114.

Fünf und dreizigster Saz.



L. Vorhin waren zwei Winkel und eine Seite gegeben (§ 110); jezt wollen wir aus zwei Seiten und einem einer bekanten Seite gegenüber liegenden Winkel das Dreiekk auflösen. — Es sei gegeben ein Dreiekk ABC,

eine Seite AB = 57,32
eine Seite BC = 63,5452;
und ein Winkel A = 65° 30′

Es wird gesucht der Winkel C. — Wir wollen uns bloß der Logarithmen bedienen.

S. Log. BC = Log. 63,5452 = 1,8030827
Log. A = Log. Sin. 65° 30′ = 9,9590229
Log. AB = Log. 57,32 = 1,7583061
11,7173290
Log. C = Log. Sin. 55° 10′ = 9,9142463

L. Und der Beweis?

S. Den enthält § 107.

L. Nun wollen wir auch die übrigen noch unbekanten Stükke des Dreiekks ABC suchen. Zuerst den Winkel B!

S. $A + B + C = 180^\circ$

$$\begin{array}{rl} A + B + C &= 180^\circ \\ A \quad\quad + C &= 120^\circ\ 40' \\ \hline B \quad\quad\quad &= 59^\circ\ 20' \end{array}$$

(G. § 121).

L. Und nun AC!

S. Wird gefunden nach § 110:

$$\begin{array}{rl} \text{Log. Sin. } 55^\circ\ 10' &= 9{,}9142464 \\ \text{Log. } 57{,}32 &= 1{,}7583061 \\ \text{Log. Sin. } 59^\circ\ 20' &= 9{,}9345738 \\ \hline & \ 11{,}6928799 \\ \hline \text{Log. } 60{,}065 &= 1{,}7786335 \end{array}$$

L. Diese Aufgabe heisst : : ?

S. Aus zwei Seiten, mit einem ihrer GegenWinkel ein Dreiekk aufzulösen.

§ 115.

L. Es ist noch ein Zweifel zu beseitigen. Da Bögen und Winkel, welche von 90 Grad zu beiden Seiten gleichviel unterschieden sind, gleiche Sinusse haben (§ 11); so lässt uns die Rechnung, in Ansehung des Winkels C in Ungewisheit ob er spiz oder stumpf sei. Er kan nämlich

$$90^\circ - 34^\circ\ 50' = 55^\circ\ 10'$$

er kan aber auch

$$90^\circ + 34^\circ\ 50' = 124^\circ\ 50'$$

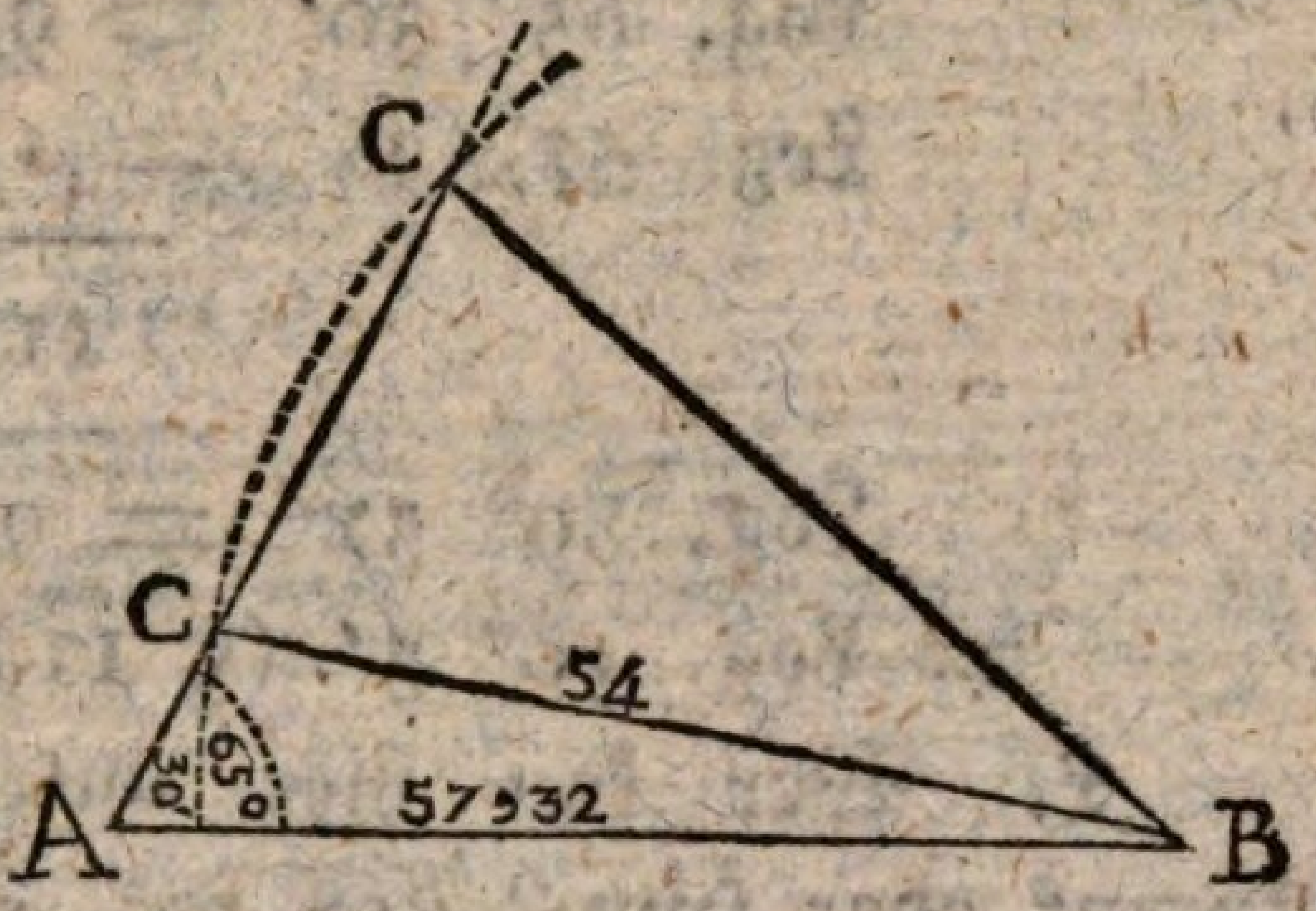
seyn. Was entscheidet hier?

S. Zunächst könte es der Winkel A. Ist der recht oder stumpf; so kann kein anderer stumpf seyn (G. § 119).

L. Das ist wahr: wenn nun aber A spiz ist, wie hier?

S. Dan können die Seiten AB und BC ent=

scheiden. Ist BC länger als AB; so ist auch A grösser als C (G. § 82), und C kan nicht anders als spitz sein.



L. Auch richtig. Aber angenommen A und AB bleiben wie zuvor, BC aber sei 54?

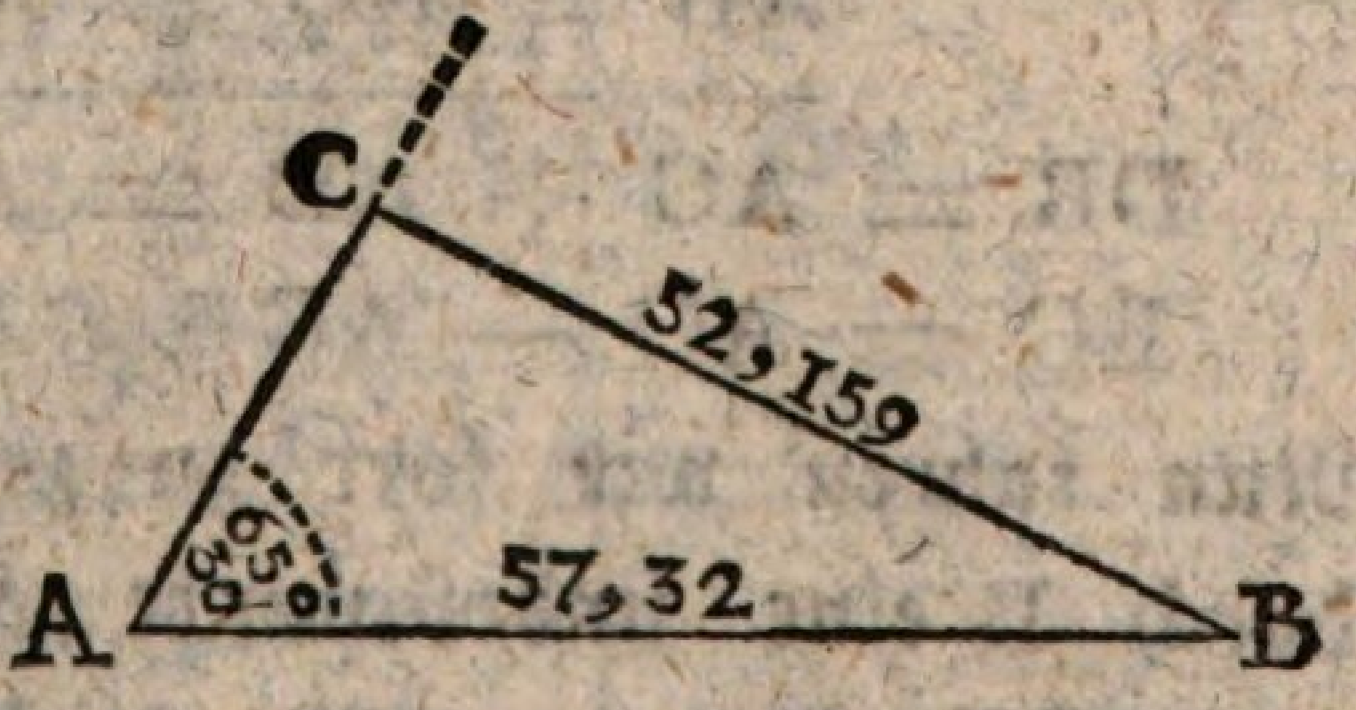
S. Log. BC = Log. 54 = 1,7323938
Log. Sin. A = Log. 65° 30′ = 9,9590229
Log. AB = Log. 57,32 = 1,7583062

11,7173291

Log. Sin. C = Log. Sin. 74° = 9,9849353
Kan = aber auch der Log. Sin. von 106° seyn (§ 11).

L. Da haben wir also zweierlei C;
nämlich C = 90° — 16° = 74°,
und C = 90° + 16° = 106°.
Wie geht das zu?

S. Wan man aus B, mit 54 einen Bogen zieht; so schneidet dieser die gegenüber liegende Seite zwei Mal, und macht mit ihm einen stumpfen, und einen spitzen Winkel.



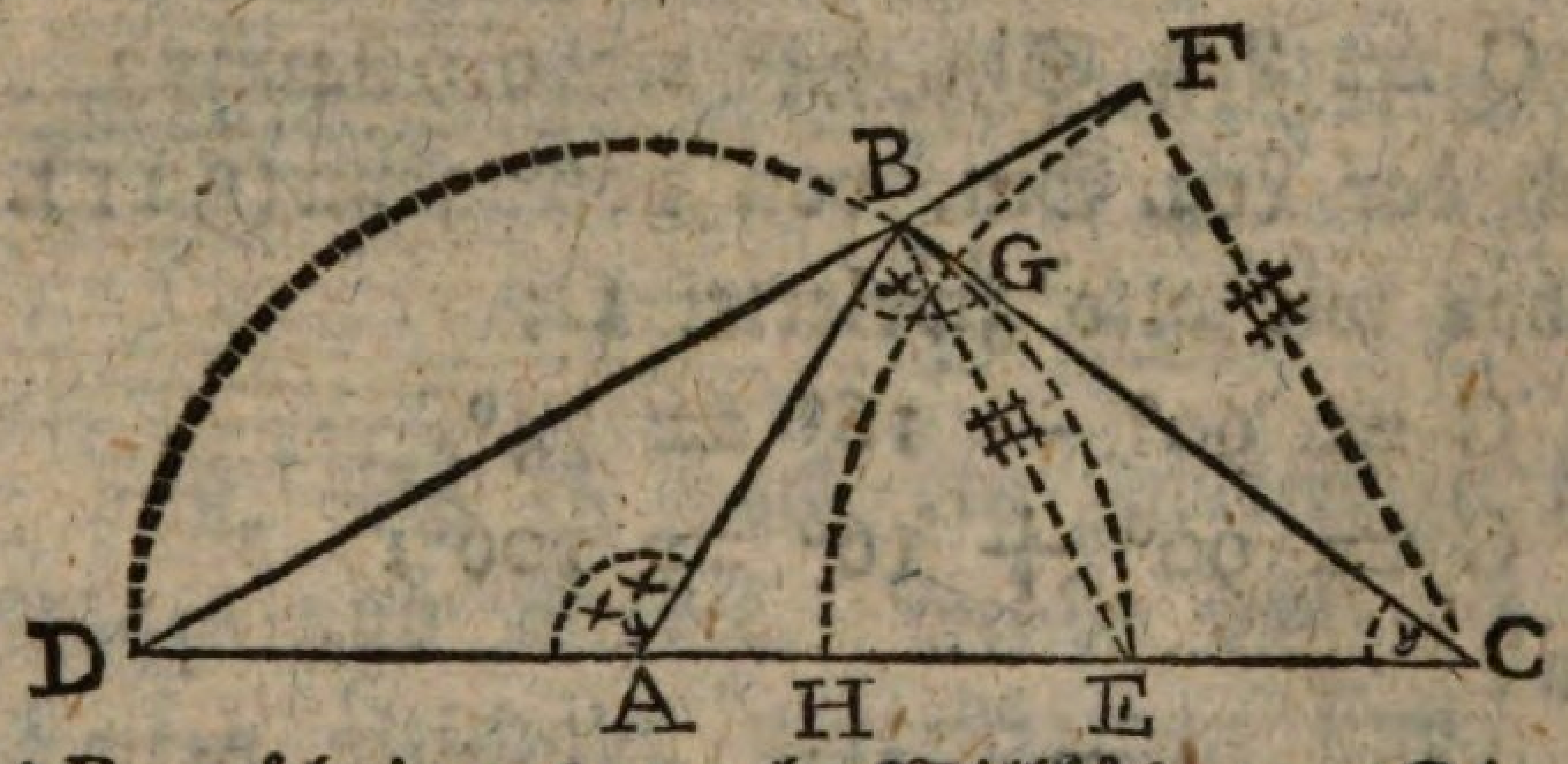
L. In der Ausübung, wan man die Figur vor sich hat, wird man dem zu berechnenden Winkel mehrenteils schon ansehn, ob er spitz oder stumpf sei: Indessen kan es doch Fälle geben, wo Augen und Werkzeuge trügen. Angenommen, z. B., es sei BC = 52,159; alles Andre aber wie vorhin.

S.	Log. 52,159	=	1,7173293
	Log. 65° 30′	=	9,9590229
	Log. 57,32	=	1,7583062
			11,7173291
	Log. 89° 57′	=	9,9999998
	= Log. 90° 3′ (§ 11).		

L. Wer kan hier unterscheiden ob Winkel C stumpf oder spitz? 89° 57′, oder 90° 3′, sei?

§ 116.

Sechs und dreizigster Satz.



L. Es wird ein Dreiekk gezeichnet, dessen eine Seite AC länger seyn muß als die andre AB; übrigens nach Willkühr. Die Seite AC wird über A hinaus verlängert, und die Weite AB wird auf diese Verlängerung von A nach D, und auf die Linie AC, von A nach E getragen. Es ist also

AB = AD = AE (Verfert.)

DB = AC + AD = AC + AB
EC = AC — AE = AC — AB } (S. § 27).

Nun fahren wir fort zu zeichnen. — Von D wird durch B eine unbestimmte Linie gezogen. Hierauf wird BE gezogen, und gleichlaufend mit ihr, aus C, eine Linie CF, welche die aus D über B gezogene Linie schneidet in F. — Weil nun AB = AD = AE; so läßt sich aus A eine KreisLinie ziehn, welche durch

die Punkte D, B, E geht (G. § 21). — Was für ein Winkel ist nun DBE?

S. Ein rechter (G. § 199).

L. Und der Winkel DFC?

S. Ist auch ein rechter (G. § 113).

L. Da haben wir also ein Dreiekk DCF, in welchem

BE ⌗ FC.

Welchem Verhältnisse ist nun das Verhältniß DC zu EC gleich?

S. DC .. EC = DF .. BF (G. § 246).

L. Oder, wenn man für DC und EC andre, vorhin gefundene Ausdrükke braucht:

(AC + AB) .. (AC — AB) = DF .. BF

Nun wollen wir auch für DF und BF andre, und zwar trigonometrische, Ausdrükke suchen, und zu dem Behuf aus C, mit dem Halbmesser CF, einen Bogen FGH ziehn. — Welche Bedeutung haben nun die Linien FB und FD, in Beziehung auf die Bögen FG und FH?

S. BF ist Tangente des Bogens FG, und DF Tangente des Bogens FH (§ 29).

L. Und zugleich der Winkel

BF = Tangente ∠ BCF } (§ 59)
DF = Tangente ∠ DCF

L. Aber für welchen Halbmesser?

S. Für den Halbmesser CF (§ 60).

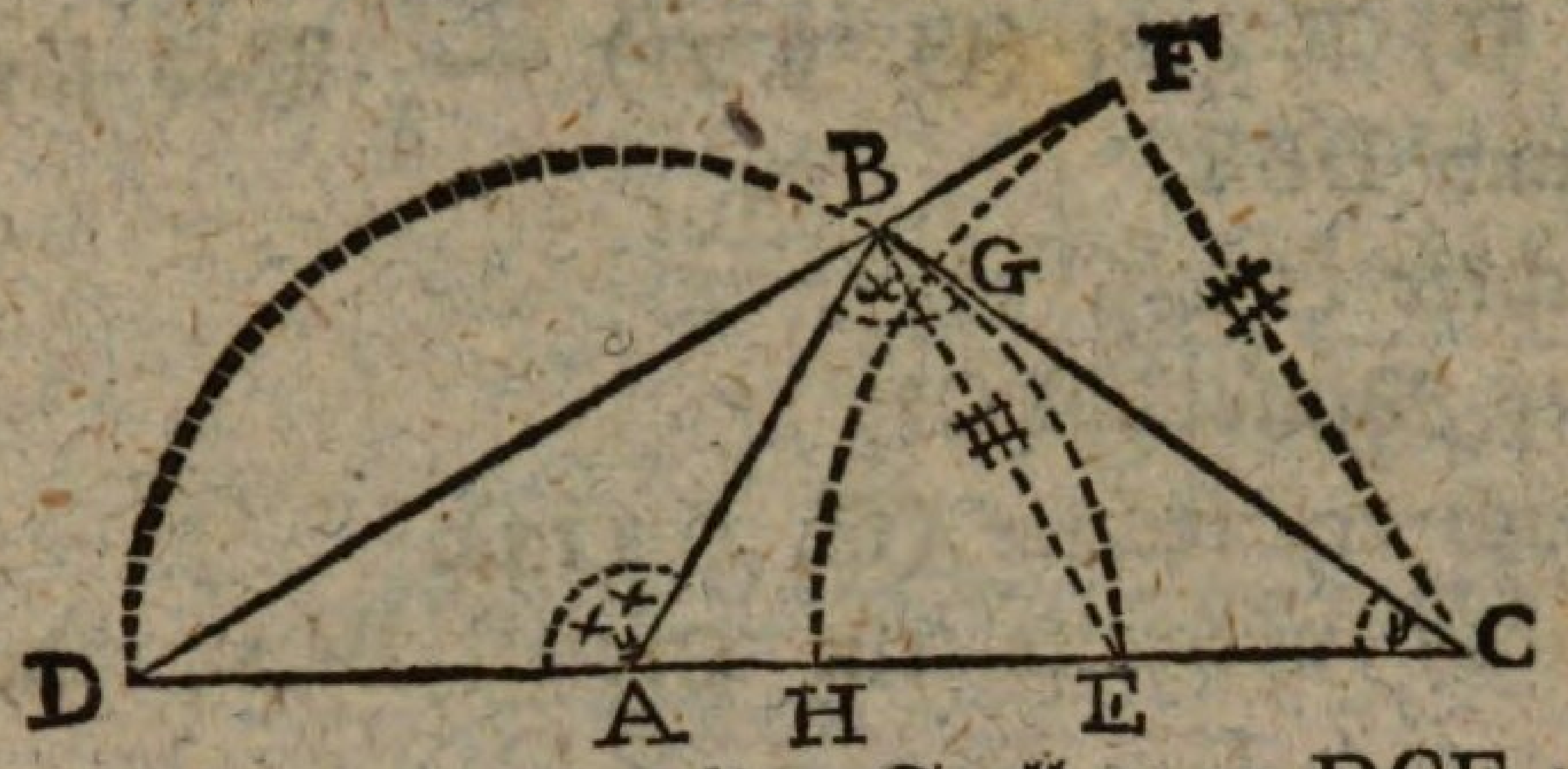
L. Nun werden in der Proportion

(AC + AB) .. (AC — AB) = DF .. BF

für DF und BF die neugefundenen Ausdrükke gesetzt.

S. (AC + AB) .. (AC — AB) = Tg. DCF .. Tg. BCF

L. Ganz gut! aber die Winkel DCF und BCF



sind nicht Winkel des Dreiekks ABC; und mit diesem haben wir es doch eigentlich zu tuhn. Wir müssen daher an die Stelle von DCF und BCF Winkel des Dreiekks ABC zu bringen suchen, und zwar Winkel an BC, die wir hier GrundLinie nennen wollen. Von den beiden Winkeln an der GrundLinie mag der Bequemlichkeit wegen, der grössere, ABC, x; und der kleinere, ACB, y heissen. Was für ein Dreiekk ist ABE?

S. Ein gleichschenkliges.

L. Folglich ∠ ABE = ∠ AEB (G. § 57) = DCF (G. § 113).

Aber von den Winkeln EBC und BCF, welcher ist der gröste?

S. ∠ EBC = ∠ BCF (G. § 112).

L. Und wie groß ist DAB?

S. ∠ DAB = x + y
= ABE + AEB } (G. § 117)

L. Und wie groß DBE?

S. DBE = ∟ = DFC (G. § 113).

L. Weil nun

DAB = x + y = ABE + AEB (V.)
und = ABE = AEB = DCF

so ist

DAB = x + y = ABE + ABC = 2 ABE
= AEB + AEB = 2 AEB
= DCF + DCF = 2 DCF

Folglich (x + y) : 2 = ABE = AEB = DCF (A. § 51).

Wer kan mir nun für BCF = EBC Gleichungen angeben?

S. $BCF = EBC = ABC - ABE$
$= x - (x + y) : 2$
$= x - (\frac{x}{2} + \frac{y}{2}) : 2$
$= \frac{x}{2} - \frac{y}{2}$
$= (x - y) : 2$

L. Nun sind wir am Ziele, wir dürfen nur für DCF und BCF andre, von x und y genommene Ausdrükke setzen.

S. $DCF = (x + y) : 2$
$BCF = (x - y) : 2$

L. Nun in der Proportion
(AC + AB) .. (AC — AB) = Tg. DCF .. Tg. BCF
die neuen Ausdrükke angebracht!

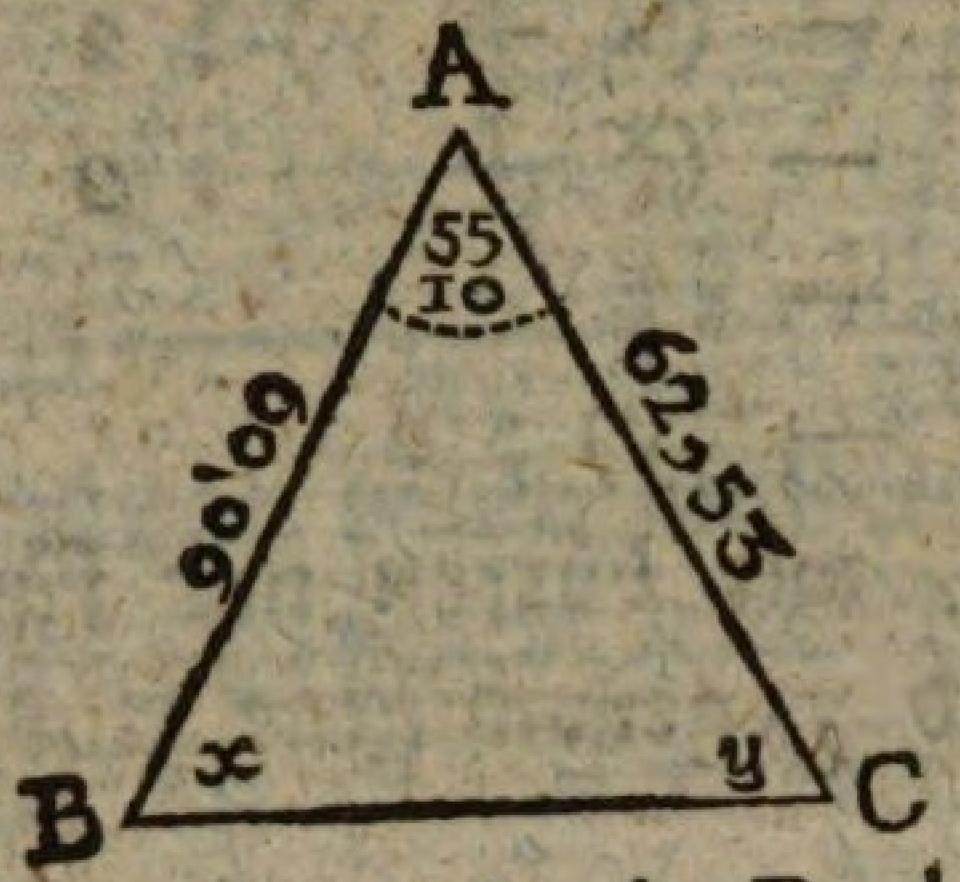
S. $(AC+AB) .. (AC-AB) = \left(\frac{T.x+y}{2} .. \frac{T.x-y}{2}\right)$

L. Nun ist noch übrig diese Formel in Worte zu kleiden.

S. In jedem Dreiekke verhält sich
die Summe der beiden Schenkel (AC + AB)
zu ihrem Unterschiede (AC — AB)
wie die Tangente der halben Summe der Winkel
an der Grundlinie $\left(\frac{Tg.\ x + y}{2}\right)$
zur Tangente ihres halben Unterschiedes
$\left(\frac{Tg.\ x - y}{2}\right)$

§ 117.

Sieben und dreizigster Satz.



L. In einem Dreiekke ABC wird gegeben

$\angle A = 55^\circ\ 10'$:

wie groß ist $(x + y)$ die Summe der beiden übrigen Winkel B und C?

S. $A + B + C = 180^\circ$ (S. § 118)

$A \qquad\qquad = 55^\circ\ 10'$

$B + C = 124^\circ\ 50' = x + y$

L. Es werden gegeben in dem Dreiekke ABC die beiden den bekanten Winkel einschliessenden Schenkel

$AB = 60{,}06$,

$AC = 62{,}53$:

Es wird verlangt $x - y$ der Unterschied der beiden unbekanten Winkel B und C.

S. Ich verfahre nach § 113

Log. $AC + AB$ = Log. 122,59 = 2,0884550

Log. $AC - AB$ = Log. 2,47 = 0,3926970

Log. Tg. $(B+C):2$ = Log. Tg. $62^\circ\ 25'$ = 10,2819827

= 10,6746797

Log. Tg. $(x-y):2$ = L. T. $2^\circ\ 12'\ 43''$ = 8 5862247

L. Das ist der halbe Unterschied $(x - y) : 2$. Welches ist nun der ganze?

S. $(x - y) : 2 = 2^\circ\ 12'\ 43''$

$x - y \qquad = 4^\circ\ 25'\ 26''$.

L. Diese Aufgabe lautet = = ?

S. In einem Dreiekke sind gegeben zwei Seiten, und der ZwischenWinkel: man soll die Summe und den Unterschied der beiden übrigen Winkel finden.

§ 118.

Acht und dreizigster Satz.

L. Die Summe und den Unterschied zweier unbekanten Winkel eines Dreiekks wissen wir zwar zu finden (§ 116), aber die Winkel selbst fehlen noch. Dazu müssen wir hier eine Aufgabe einschieben: Aus der Summe zweier Grössen:

$$S = x + y,$$

und ihrem Unterschiede

$$D = x - y:$$

die Grössen x und y selbst zu finden.

S. Wir müssen in den gegebenen Gleichungen auf einer Seite eine einzelne unbekante Grösse, x oder y, auf die andre lauter bekante, zu bringen suchen.

$$\begin{array}{l} x + y = S \\ x - y = D \\ \hline 2x \quad = S + D \\ \hline x \quad = \tfrac{1}{2} S + \tfrac{1}{2} D \end{array}$$

$$y = S - (\tfrac{1}{2} S + \tfrac{1}{2} D) \text{ (G. § 37)}$$
$$= \tfrac{1}{2} S - \tfrac{1}{2} D.$$

L. Da haben wir die Auflösung in Zeichen:

$$\tfrac{1}{2} S + \tfrac{1}{2} D = x$$
$$\tfrac{1}{2} S - \tfrac{1}{2} D = y.$$

Wie lautet sie nun in Worten?

S. Zur halben Summe zweier Grössen ihr halber Unterschied addirt, gibt die grössere; von der halben Summe den halben Unterschied subtrahirt, gibt die kleinere von beiden.

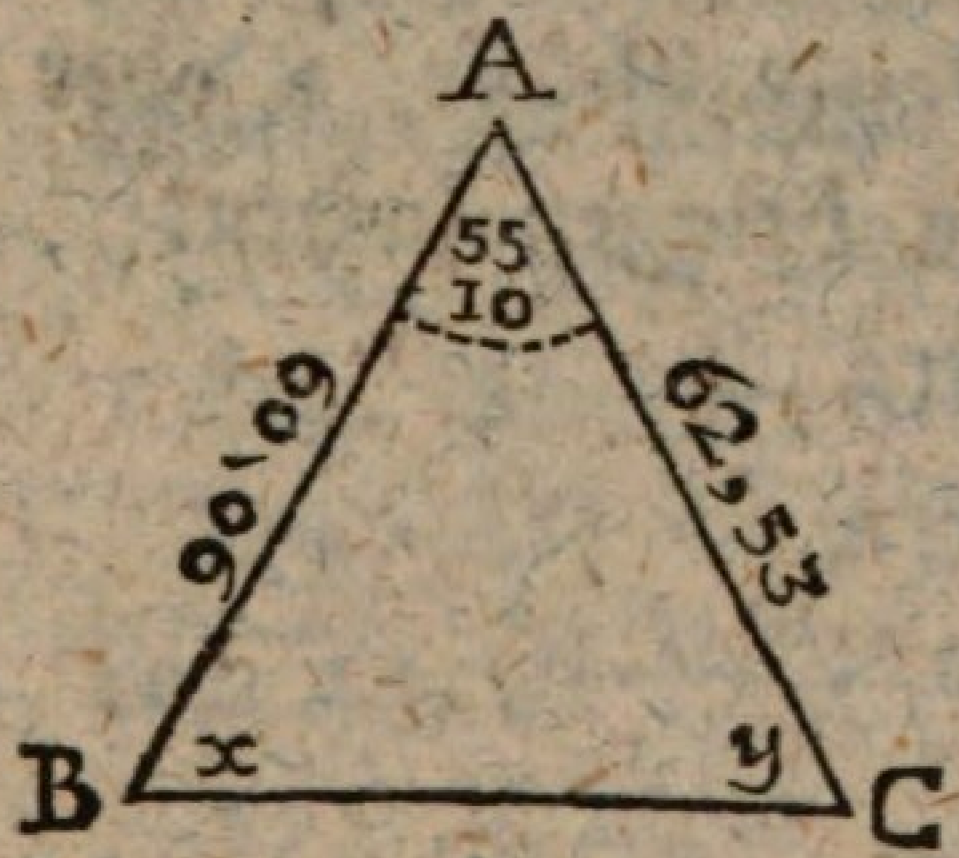
§. 119.

Dieser Satz gehört eigentlich in die Arithmetik. — Solche aus andern Wissenschaften eingeschaltete Sätze, weil sie dort entweder vergessen worden, oder nicht gut anzubringen gewesen, pflegt man LehnSätze zu nennen. SchaltSätze wäre vielleicht passender, weil lehnen oder leihen wiedergeben voraussetzt. — In der Folge werden auch Lehn-, oder SchaltSätze aus der Geometrie vorkommen.

§ 120.

Neun und dreizigster Satz.

L. Nun lässt sich auch die Aufgabe auflösen. Aus zwei Seiten und ihrem ZwischenWinkel ein Dreiekk aufzulösen.



Es sei AB = 60,06
AC = 62,53
A = 55° 10′

S. Ich suche zuerst (nach § 116):

$B + C = 124° 50' = S$

$B - C = 4° 22' = D$

Da finde ich (nach § 118):

1) $B = x = \frac{1}{2} S + \frac{1}{2} D$

$= 62° 25' + 2° 12' 43''$

$= 64° 37' 43''$

2) $C = y = \frac{1}{2} S - \frac{1}{2} D$

$= (62^\circ\ 25') - (2^\circ\ 12'\ 43'')$

$= 60^\circ\ 12'\ 17''$.

L. Und nun, da zwei Seiten und alle Winkel bekant sind, lässt sich auch die dritte Seite finden (§ 110).

S. Log. Sin. $64^\circ\ 37'\ 43'' = 9{,}9559521$

Log. $62{,}53 = 1{,}7960884$

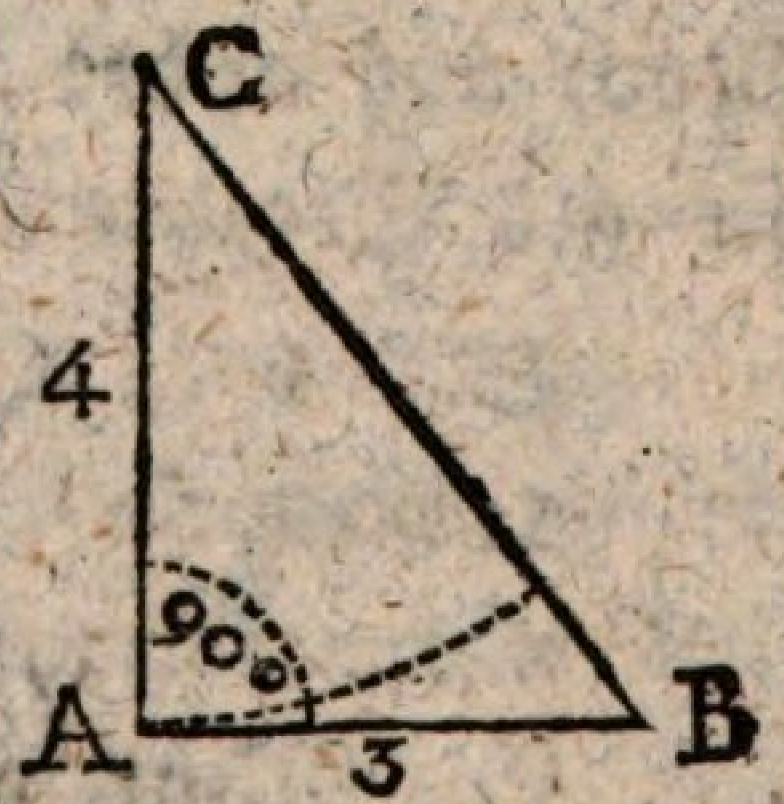
Log. Sin $55^\circ\ 10' = 9{,}9142464$

$11{,}7103348$

Log. $56{,}805 = 1{,}7543827$

L. Weiter hin (§ 131) werden wir aus den hier (§ 117) gegebenen drei Stükken die dritte Seite unmittelbar, ohne vorher gehende WinkelBerechnung finden lernen.

§ 121.



L. Für das rechtwinklige Dreiekk gibt es leichtere Auflösungen der vorigen Aufgabe. Gesetzt es wäre gegeben, ausser dem rechten Winkel A,

$AB = 3$

$AC = 4$

und man verlangte den Winkel C?

S. Ich nehme AC zum Halbmesser; so ist AB die Tangente des Winkels C. Und nun schliesse ich:

AC .. AB = TafelHalb. .. TafelTang. C

4 .. 3 = 10000000 .. (30000000 : 4)

Es ist aber $30000000 : 4 = 7500000 =$ Tg. $36^\circ\ 52'$.

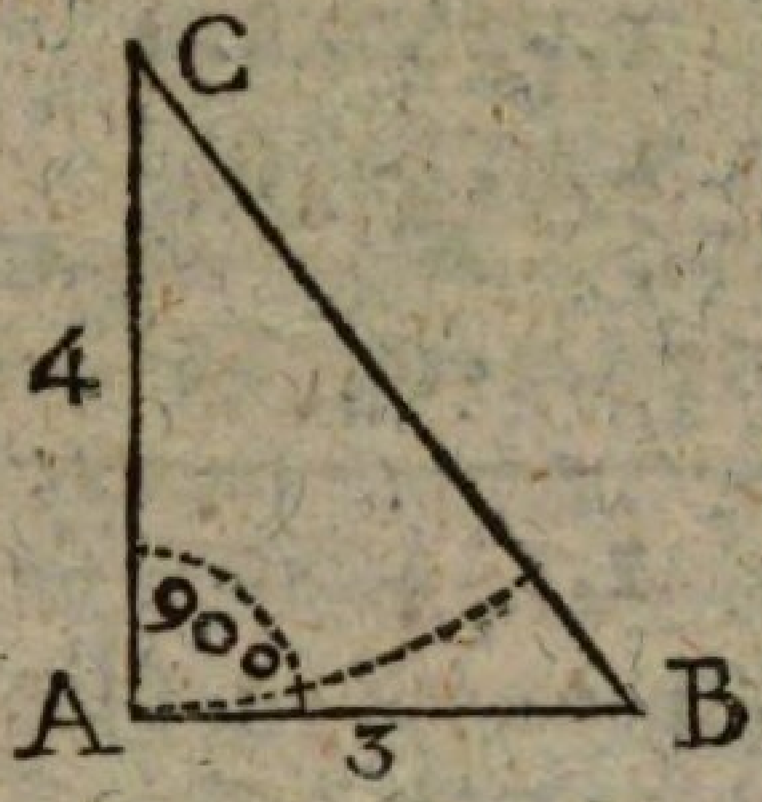
L. Nun findet man auch den Winkel B = 53° 8′ (S. § 121), und die Seite BC. Diese wollen wir doch berechnen.

S. Sinus C .. Sinus A = AB .. BC

5999549 .. 10000000 = 3 .. $\frac{30000000}{5999549}$

30000000 : 5999549 = 50004 ::

L. Eigentlich solte er nur 5 seyn. Daß hier etwas mehr kömt, davon ist die Ursache, daß der Winkel C, welcher 36° 52′ 11″ 38‴ seyn solte, etwas kleiner angenommen ist. Hat man für die zu kleine Zahl 5999549 die grössere 5999550 gesetzt (§ 113), so hätte man 5,0003 :: erhalten, welches der Wahrheit etwas näher kömt. Nimt man den Winkel C = 36° 52′ 12″; so ist er um ein Geringes zu groß, und man erhält 4,99998 ::. Vollkommen richtig erhält man BC, wenn man Tangente C = 6000000 annimt: Denn



30000000 : 6000000 = 5

Noch auf andre Art kan man BC finden, wenn man sie als Secante des Winkels C betrachtet.

S. r .. Secante C = CA .. CB

10000000 .. 1,2499471 = 4 .. z

z = 4,9997884 : 10000000 = 0,49997884.

L. Nimt man den Winkel C = 36° 52′ 12″ an; so wird Secante C = 12500016, und z = 5,0000064. Verändert man aber die etwas zu grosse Secante 12500016 in 12500010 (§ 113); so ist

z = (12500010 × 4) : 10000000
= 5,0000040

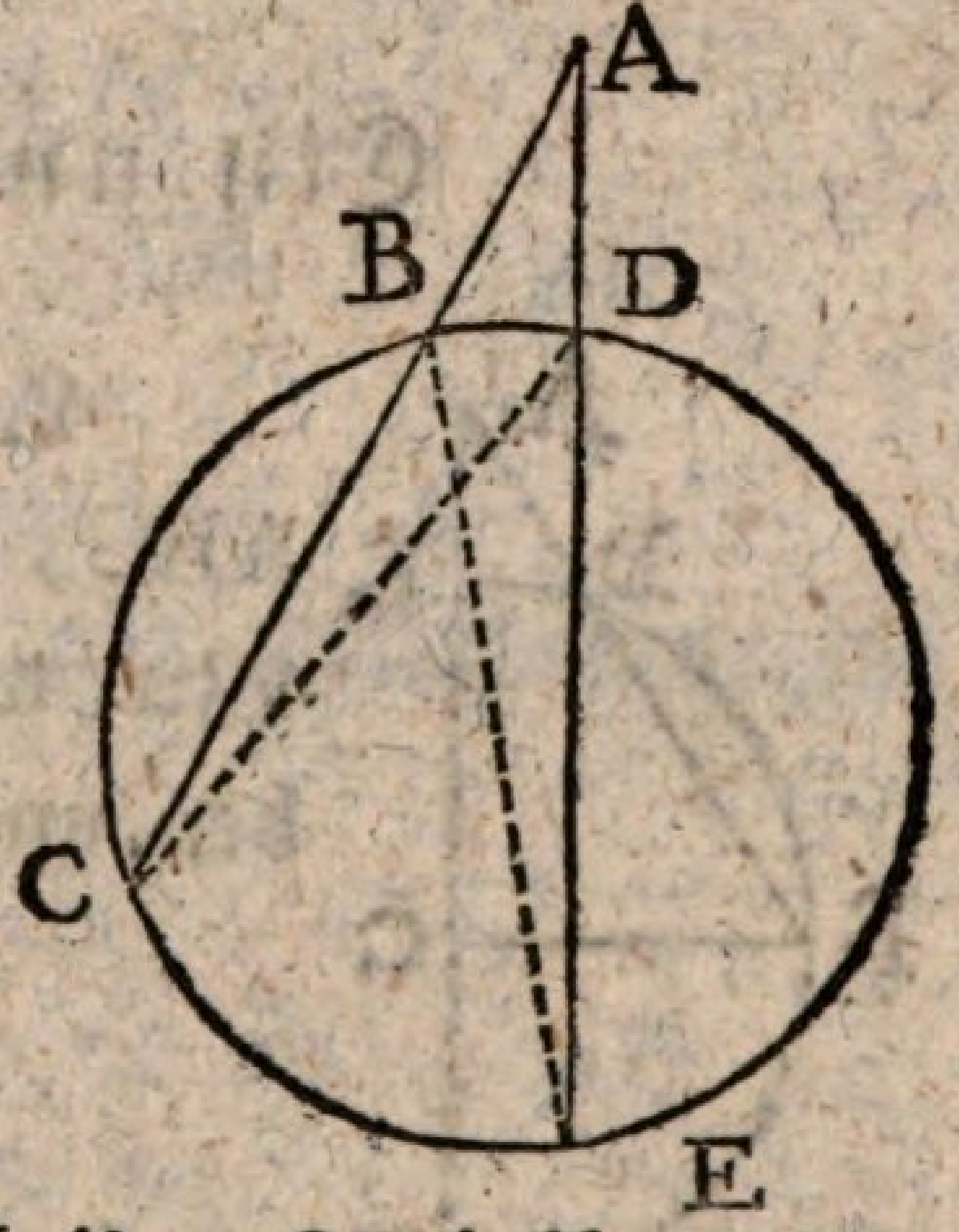
Diese SecantenRechnung vereinigt den Vorzug der Richtigkeit und der Kürze, ist aber nicht immer an=

wendbar, weil nicht alle Tafeln Secanten enthalten. Wolte man sie selbst erst berechnen; so würde das zwar nicht schwer seyn, weil Sec. x = rr : Cos. x (§ 51), würde aber die Rechnung wieder weitläuftig machen. — Ganz genau findet man z = CB, wenn man Sec. C = 12500000 annimt. Es ist alsdan

$$z = (12500000 \times 4 : 10000000$$
$$= 50000000 \quad : 10000000$$
$$= 5$$

§ 122.

Virzigster Satz.



L. Es wird ein Kreis gezeichnet. Von einem beliebigen Punkte A ausserhalb desselben werden zwei Linien gezogen, welche die KreisLinie schneiden in B und C, in D und E. — Hier ist zu beweisen, daß

AC . . AE = AD . . AB

Dazu werden ein par HülfsLinien, BE, CD, erfodert. — Die beiden Dreiekke ACD und AEB haben den Winkel A gemein; aber von den Winkeln C und E, welcher ist der gröste?

S. Sie sind einander gleich, denn beide sind Winkel am Umfange, und stehn auf einerlei Bogen (G. § 213).

L. Und die dritten Winkel ADC, ABE . . ?

S. Sind auch einander gleich (G. § 122).

L. Und die Dreiekke ACD, AEB . . ?

S. Sind einander ähnlich (G. § 257).

L. Und ähnliche Dreiekke haben proportionirte Seiten (G. § 258): folglich = = ?

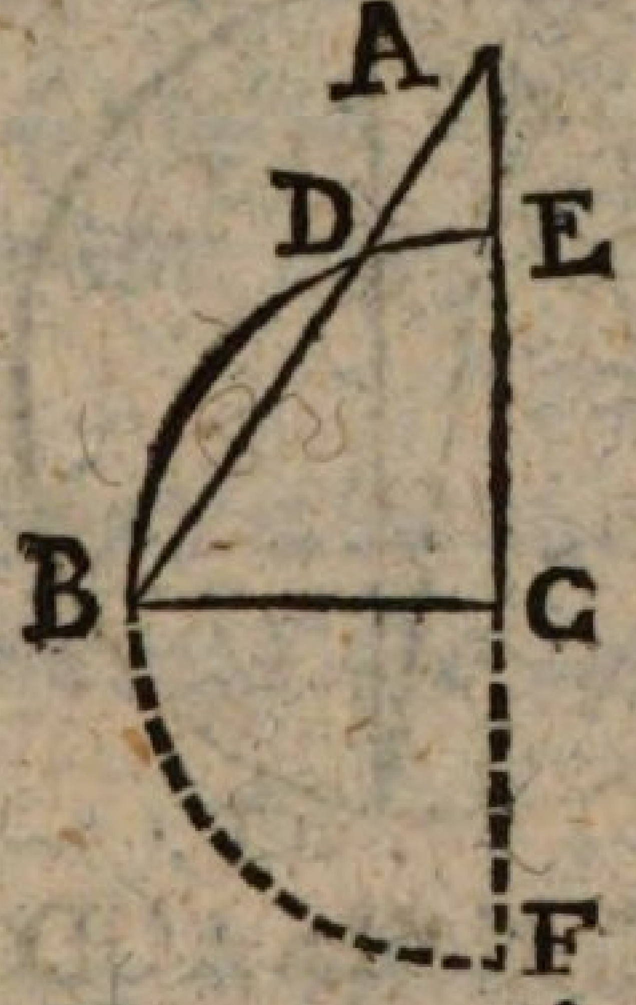
S. AC .. AE = AD .. AB.

L. Wie wird dieser LehrSaz nun in Worte gekleidet?

S. Wenn von einem Punkte ausserhalb eines Kreises zwei gerade Linien gezogen werden, welche jede den Kreis zwei Mal schneiden; so sind diese Linien ihren ausserhalb befindlichen Abschnitten umgekehrt proportionirt.

§ 123.

Ein und virzigster Saz.



L. Es wird gegeben ein Dreiekk ABC, dessen drei Seiten bekant sind. Wir wollen sie nach ihren GegenWinkeln benennen, aber mit kleinen Buchstaben:

AB = c = 11
AC = b = 9
BC = a = 6

Mit der kürzesten Seite BC, oder a, wird aus C eine KreisLinie gezogen, welche die beiden längern schneidet in D und E. Nun sollen die Abschnitte der Linien b und c berechnet werden: dazu aber wird eine HülfsLinie erfodert. Welche wird das seyn?

S. Man müste b verlängern bis an den Umfang in F.

L. Recht! — Wie lang ist nun CE?

S. CE = a = CF (G. § 21) = 6

L. Und AE?

S. $AE = b - CE$

$= b - a$

$= 9 - 6 = 3.$

L. Und AF?

S. $AF = b + CF$

$= b + a$

$= 9 + 6 = 15$

L. Und AD?

S. $AD = c - BD$

$= 11 - BD.$

L. Da BD noch unbekant ist; so bleibt uns auch AD unbekant. Solte sich AD nicht auf andre Art finden lassen? nach § 121?

S. $c \,..\, AF = AE \,..\, AD$ (§ 122)

$AD = (AF \times AE) : c$ (A. § 294)

$= (15 \times 3) : 11$

$= 45 : 11 = 4 + \frac{1}{11}$

L. Wir wollen für AF und AE gleichbedeutende Ausdrükke setzen.

S. Dan ist $AD = (AF \times AE) : c$

$= [(b + a) \times (b - a)] : c$

$= (b^2 - a^2) : c$

$= (9^2 - 6^2) : 11$

$= (81 - 36) : 11$

$= 45 : 11 = 4 + \frac{1}{11}.$

L. Nun wird sich auch BD berechnen lassen.

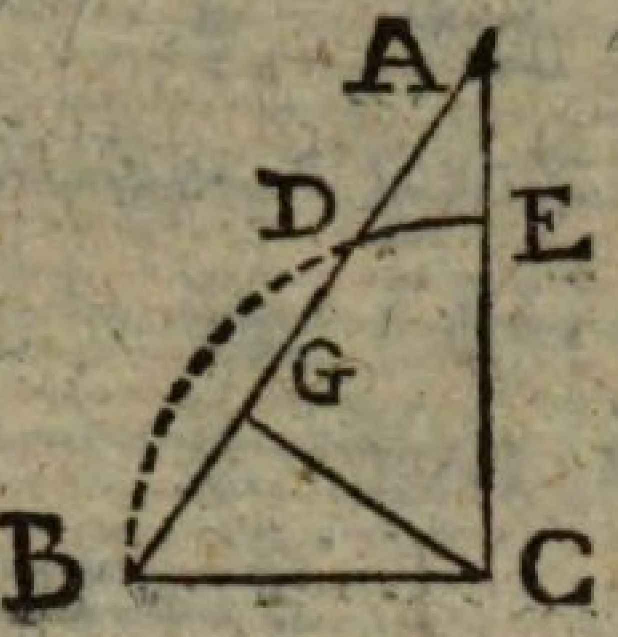
S. $BD = c - AD$

$$= c - \frac{b^2 - a^2}{c}$$

$= 11 - (4 + \frac{1}{11})$

$= 6 + \frac{10}{11}.$

L. Wenn man nun von C, auf die gegenüber



stehende Seite AB, eine senkrechte Linie CG zieht: wie teilt die den Abschnitt BD?

S. In zwei gleiche Teile (G. § 177).

1. Wie groß ist nun BG?

S. $BG = DG = \frac{1}{2} BD$

$$= \left\{c - \frac{b^2 - a^2}{c}\right\} : 2$$

$$= (6 + \tfrac{10}{11}) : 2$$

$$= 3 + \tfrac{5}{11}$$

L. Und AG?

S. $AG = DG + AD$

$$= \left\{c - \frac{b^2 - a^2}{c}\right\} : 2 + \frac{b^2 - a^2}{c}$$

$$= 3 + \tfrac{5}{11} + 4 + \tfrac{1}{11}$$

$$= 7 + \tfrac{6}{11}$$

L. Addirt man nun AG und BG; so muß $c = 11$ herauskommen, und man hat die Probe von der Richtigkeit der Rechnung.

S. $AG + BG = (7 \times \tfrac{6}{11}) + (3 + \tfrac{5}{11}) = 11.$

L. Als Aufgabe eingekleidet, wie würde dis lauten?

S. Aus allen drei Seiten eines Dreiekks die Abschnitte zu finden, welche entstehen, wenn aus einer WinkelSpitze desselben, auf der GegenSeite eine senkrechte Linie gezogen wird.

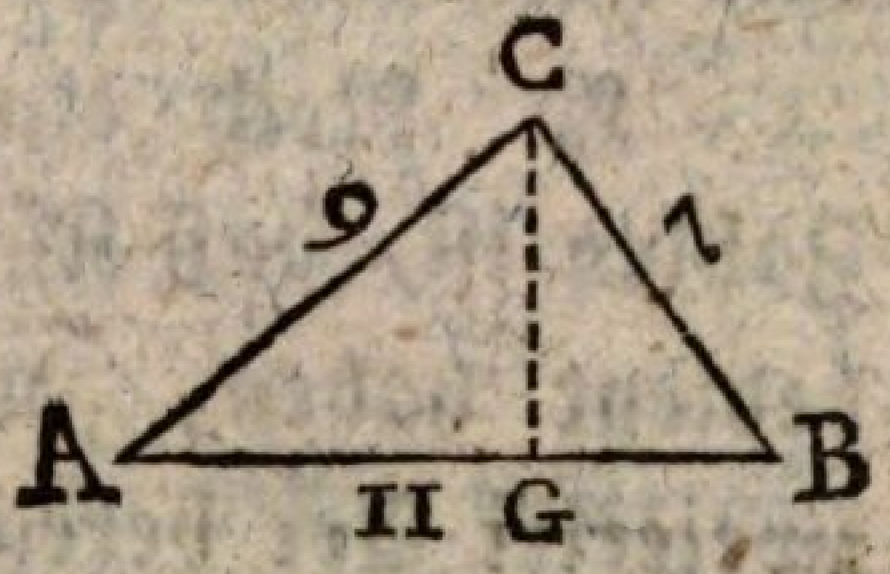
L. Man könte den Satz auch als LehrSatz einkleiden: Wenn aus einer WinkelSpitze eines Dreiekks, auf die gegenüber stehende Seite eine senkrechte Linie gezogen wird; so ist auf den beiden Abschnitten, welche diese macht, der kleinere

gleich der långsten Seite, weniger u. s. w. Man würde viel Worte brauchen, und doch Mühe haben, so verståndlich zu seyn, als die Formeln es sind.

§ 124.

Zwei und virzigster Saz.

L. In einem Dreiekke ABC sind gegeben alle drei Seiten:



$$AB = c = 11$$
$$AC = b = 9,$$
$$BC = a = 7:$$

man soll die Winkel finden.

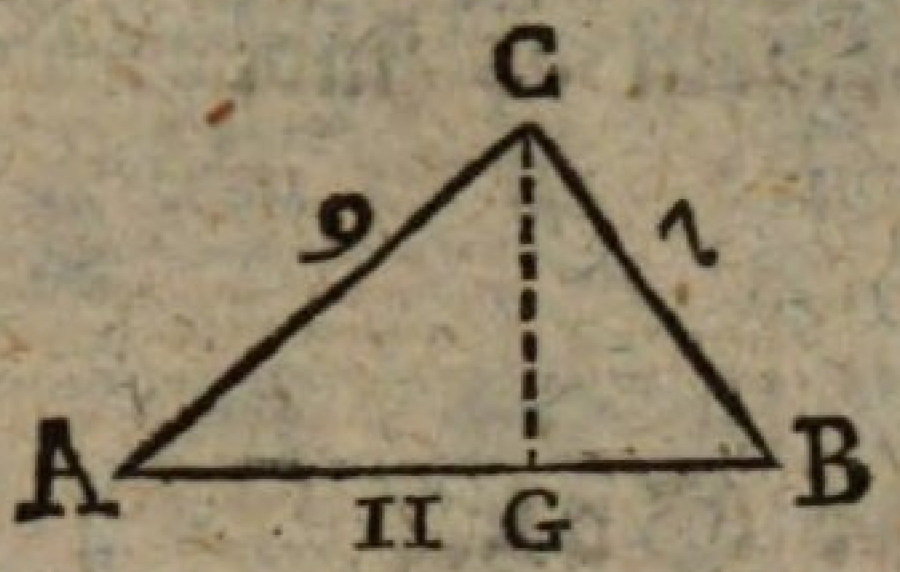
S. Ich ziehe zuerst die senkrechte Linie CG; berechne darauf die Abschnitte BG, AG nach § 122;

$$BG = \left\{c - \frac{b^2 - a^2}{c}\right\} : 2$$
$$= \left\{11 - \frac{81 - 49}{11}\right\} : 2$$
$$= (11 - \tfrac{32}{11}) : 2$$
$$= \tfrac{89}{11} : 2 = \tfrac{89}{22}$$
$$AG = BG + \frac{b^2 - a^2}{c}$$
$$= \tfrac{89}{22} + \tfrac{32}{11}$$
$$= \tfrac{89}{22} + \tfrac{64}{22} = \tfrac{153}{22}.$$

L. Bis dahin recht! aber wie nun weiter?

S. In dem rechtwinkligen Dreikke ACG sind mir, ausser dem rechten Winkel, auch die Seiten AC und AG bekant, mittels welchen ich den Winkel ACG finde (§ 113). Kenne ich den, so kenne ich auch den Winkel A (G. § 121). Auf åhnliche Art finde ich den Winkel B: und habe ich diesen, so habe ich auch C.

L. Nun zum Werke! Wird es besser seyn durch natürliche, oder durch künstliche Zahlen zu rechnen?



S. Da die Zahlen nicht groß sind, und überdis der Halbmesser oder Sinus totus in der Rechnung vorkömmt, so scheint die Rechnung mit natürlichen Zahlen den Vorzug zu verdienen.

L. Noch ein andrer Grund für die natürlichen Zahlen ist, daß Kästner und Lorenz sich der künstlichen bedient haben, und es gut ist, einerlei Sache auf zweierlei Art berechnet zu sehn.

S. AC .. Sinus 90° = AG .. Sinus ACG

$$9 \;..\; 10000000 = \tfrac{153}{22} \;..\; \text{Sinus ACG}$$

$$\text{Sin. ACG} = 1530000000 : 198 = 7727272 \ldots = \text{S. } 50^\circ\, 35'\, 58''$$

$$\angle\,\text{ACG} + \text{A} = 89^\circ\, 59'\, 60''$$
$$\angle\,\text{ACG} = 50^\circ\, 35'\, 58''$$
$$\text{A} = 39^\circ\, 24'\, 2''.$$

L. Nun den Winkel B!

S. BC .. Sinus 90° = BG .. Sinus BCG

$$7 \;..\; 10000000 = \tfrac{89}{22} \;..\; \text{Sinus BCG}$$

$$\text{Sin. BCG} = 890000000 : 154 = 5779220 = \text{S. } 35^\circ\, 18'\, 16''$$

$$\angle\,\text{BCG} + \text{B} = 89^\circ\, 59'\, 60''$$
$$\angle\,\text{BCG} = 35^\circ\, 18'\, 16''$$
$$\text{B} = 54^\circ\, 41'\, 44''.$$

L. Nun fehlt noch der Winkel C.

S.
$$\text{A} = 39^\circ\, 24'\, 2''$$
$$\text{B} = 54^\circ\, 41'\, 44''$$
$$\text{A} + \text{B} = 94^\circ\, 5'\, 46''$$

$$A + B + C = 179^\circ\ 59'\ 60''$$

$$C = 85^\circ\ 54'\ 14''.$$

L. Hätte man nicht den Winkel C noch auf andre Art finden können?

S. Ja, durch Addition der Winkel ACG und BCG.

$$ACG = 50^\circ\ 35'\ 58''$$
$$BCG = 35^\circ\ 18'\ 16''$$

$$ACG + BCG = 85^\circ\ 54'\ 4''.$$

L. Aber liesse sich der Winkel B nicht noch auf andre Art finden?

S. Ja; ich setze:

BC .. Sinus A = AC .. Sinus B

7 .. Sinus 39° 24′ 2″ 9 .. z

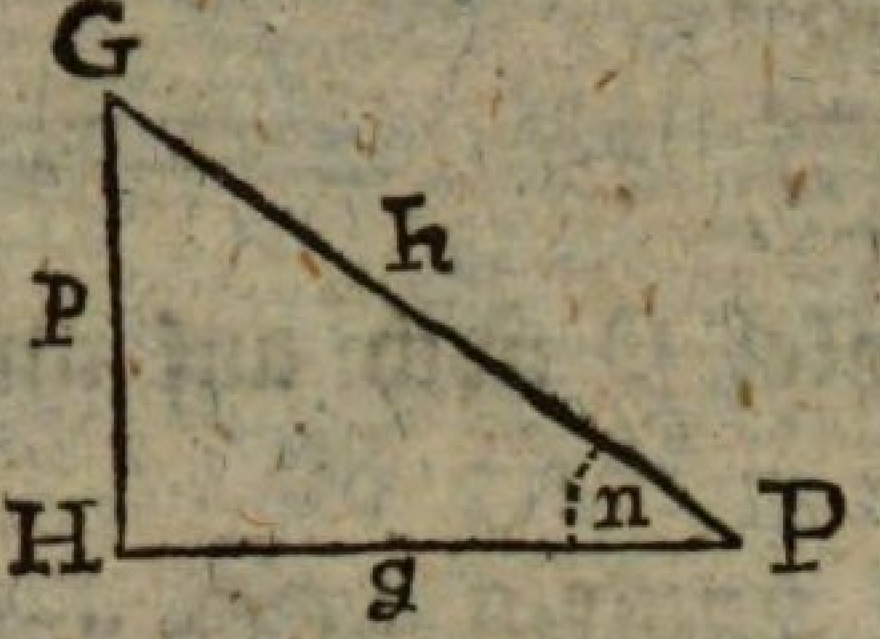
§ 125.

L. Nun sind alle mögliche Fälle, wo aus drei bekanten Stükken eines Dreiekks die unbekanten gefunden werden, vorgewesen: nur ist zuweilen die Unbequemlichkeit damit verknüpft, daß man durch Umwege gehn muste. So konten wir z. B. aus zwei Seiten und ihrem ZwischenWinkel (§ 120) die dritte Seite nicht eher finden, bis die noch unbekanten Winkel gefunden waren. Zu Abkürzung solcher und andrer Umwege werden die nun folgenden Sätze Anleitung geben.

§ 126.

Drei und virzigster Satz.

L. In einem rechtwinkligen Dreiekke GHP sei die GrundLinie, g; die Höhe, p; die längste Seite



oder Hypotenuse, h; und der der Höhe p gegenüber liegende spitze Winkel, n. Wie ist nun das Verhältniß der längsten Seite zur Höhe?

S. Sinus totus .. Sin. n = h .. p (§ 118).

L. Oder, wenn man den Sinustotus = 1 annimt?

1 .. Sinus n = h .. p

welches ist nun das Verhältniß der Höhe zur Grund-Linie?

S. Sin. n .. Sin. G = p .. g

L. Anstat des Sinus G wollen wir seinen Cosinus sehen; welcher ist das?

S. Sinus G = Cosinus n (§ 16)

Sin. n .. Cosin. = p .. g.

L. Aus dieser Vergleichung der Seiten und Winkel rechtwinkliger Dreiekke ergeben sich Formeln welche aus zwei Seiten, und einem unveränderlichen spitzen Winkel n eines rechtwinkligen Dreiekks, die dritte Seite desselben ohne Umwege finden lehren. — Wer kan mir, zuerst für p, Formeln angeben?

S. 1 .. Sin. n = h .. p

---

p = h Sin. n (A. § 294).

L. Es lässt sich noch eine Formel für p angeben.

S. Sin. n .. Cos. h = p .. g

Cos. n .. Sin. n = g .. p (A. § 286)

---

p = g Sin. n : Cos. n
= g Tang. n (§ 51).

L. Nun für g!

S. Sin. n .. Cos. n = p .. g

g = p Cos. n : Sin. n
= p Cotang. n (§ 51)
= h Sin. n Cotang. n
= h Sin. n Cos. n : Sin. n
= h × Cos. n (A. 113. 119).

L. Und nun für h!

S. 1 .. Sin. n = h .. p

Sin. n .. 1 = p .. h

h = p : Sin. n
= p (1 : Sin. n) (A. § 143)
= p Cosec. n (§ 51).

L. Nun wollen wir nach diesen Formeln Berechnungen anstellen, und uns dazu des bekanten Dreiekks bedienen, dessen Seiten

$p = 3,\ g = 4,\ h = 5$

und dessen Winkel

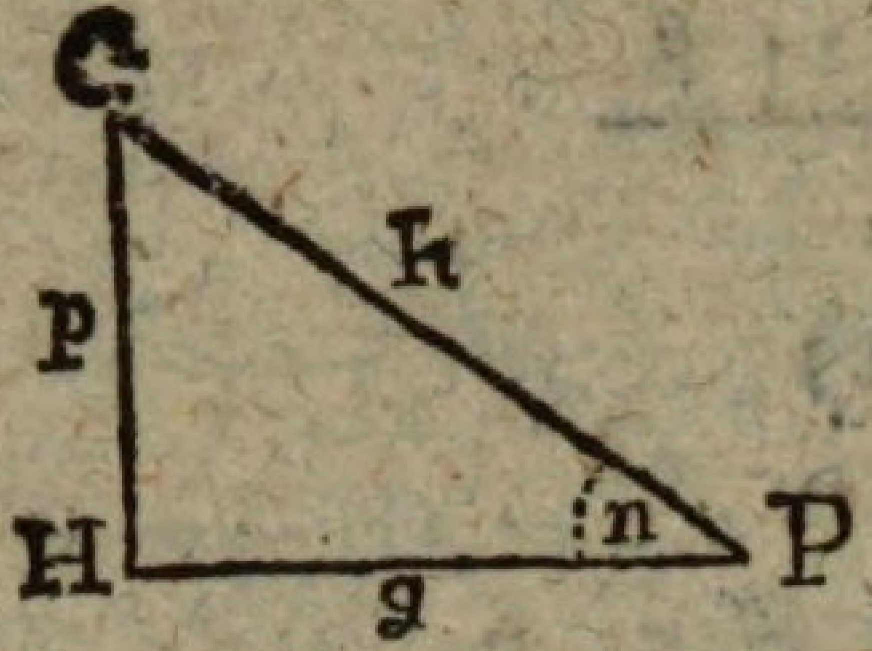
$n = 36^\circ\ 52'\ 11''\ 38'''$

wofür wir der Kürze wegen

$n = 36^\circ\ 52'\ 12''$

annehmen wollen; welche kleine Unrichtigkeit den nachteiligen Einfluß auf die Rechnung haben wird, daß wir auch die Seiten nicht ganz genau finden werden; doch wollen wir, um der Wahrheit näher zu kommen, die lezte Ziffer von n in Null verwandeln (§ 113). — Welche RechnungsArt wird hier am vorteilhaftesten seyn? die mit natürlichen, oder die mit künstlichen Zahlen?

S. Da wir nur mit kleinen Zahlen zu rechnen haben; so scheint die Rechnung mit natürlichen den Vorzug zu verdienen.



L. Das wollen wir also tuhn, und dabei nicht aus der Acht lassen, daß der Sinus totus, welcher in den gewöhnlichen Tafeln 10000000 ist (§ 84), uns nur 1 gelte (§ 83). — Nun lasst uns zu Werke schreiten nach Anleitung und Ordnung der gefundnen Formeln.

S. p = h × Sin. n
= GP × Sin. 36° 52′ 12″
= 5 × 0,6000010
= 3,000005.

L. Eigentlich solte p = 3 seyn. Wir haben es also, ungeachtet der gebrauchten Vorsicht die lezte Ziffer von 0,6000014 in 0 zu verwandeln, doch noch um ein $\frac{5}{1000000}$ zu groß gefunden. Da 5 × 0,6 = 3, so ergibt sich hieraus

Sinus n = 0,6.

S. p = g × Tang. n
= HP × Tang. 36° 52′ 12″
= 4 × 7500020
= 3,000008.

L. Hier ist der Fehler noch um 3 MillionTeilchen grösser als vorhin. — Nun wird g gesucht.

S. g = p × Cotang. n
= GH × Cotang. 36° 52′ 11″ 38‴
= 3 × Tang. 53° 7′ 48″ (22‴)
= 3 × 1,3333290
= 3,999987.

L. Ist ungeachtet der in 90 verwandelten 84 doch noch um $\frac{13}{1000000}$ zu klein: welches daher kömt, daß hier 22 Tertien übergangen sind, welche 0,00000497 betragen. Eigentlich ist Tang. 53° 7′

48″ 22‴ = 1,33333337, folglich 3 × 1,33333337 = 4,00000011, welche Zahl etwas zu groß ist, aber doch um kein MillionTeilchen von der Wahrheit abweicht. — g kann noch auf andre Art gefunden werden.

S. g = h Cos. n
= GP × Cos. 36° 52′ 11″ 38‴
= 5 × Sin. 53° 7′ 48″ (22‴)
= 5 × 0,7999990
= 3,999995.

L. Hier sind wir, ungeachtet der übergangenen Tertien, doch der Wahrheit ziemlich nahe. Woher kömt das?

S. Vermutlich weil die Cosinusse nicht so stark wachsen, als die Cotangenten.

L. So ist es. Die 22 vernachlässigten Tertien betragen nicht mehr als 0,000001066, von denen wir wirklich (gemäß der Regel § 113) 0,0000001 addirt haben, daß also nur noch 0,000000966 fehlten. Fügt man diese noch hinzu, so erhält man

0,799999966 × 5 = 3,99999983

Man sieht, daß eigentlich Cosinus n = 0,8; weil

0,8 × 5 = 4.

Nun ist noch h zu suchen, wozu wir zwei Formeln haben:

h = p : Sinus n
und h = p × Cosecante n.

S. h = p : Sinus n
= GH : Sinus 36° 52′ 12″
= 3 : 0,6 = 5.

L. Ist ganz der Wahrheit gemäß, wegen des genau angenommenen Sinus n = 0,6

S. h = p × Cosecante n
= GH × Cosecante 36° 52′ 11″ 38‴
= 3 × Secante 53° 7′ 48″ 22‴
= 3 × 1,6666627
= 4,999881.

L. Diese lezte Rechnung, und die dritte, wo wir g = 3,999987 fanden, weichen am weitesten von der Wahrheit ab. Woher kömt das?

S. Weil wir dort mit Tangenten, und hier mit Secanten rechneten, welche beide, wan sie sich dem rechten Winkel nähern, sehr stark zunehmen (§ 102. 103), im GegenSatze der Sinusse, deren Unterschiede immer unbeträchtlicher werden (§ 91).

L. Richtig! Man kan hieraus lernen in Rechnungen mit Tangenten und Cotangenten, Secanten und Cosecanten, vorsichtig zu verfahren, und vornehmlich bei Winkeln über 45 Grad, nicht leicht Tertien zu vernachlässigen. Der Wahrheit gemäß ist die Tangente des Winkels

Tangente n = 1,3333333333 - -
Secante n = 1,6666666666 - -

wie diese Rechnung lehrt.

§ 127.

L. Obgleich wegen der nur kleinen Zahlen, die Logarithmen hier nicht mit Vorteil zu gebrauchen sind; so wollen wir dennoch die Rechnung auch damit machen, teils zur Uebung, teils auch weil nicht alle Tafeln die natürlichen Zahlen der trigonometrischen Linien enthalten. — Zuerst wollen wir p suchen, und zwar nach der Formel

p = h × Sinus n.

S. $p = 5 \times \text{Sin. } 36^\circ\ 52'\ 12''$
$= \text{Log. } 5 + \text{Log. Sin. } 36^\circ\ 52'\ 12''$
$\text{Log. } 5 = 0{,}6989700$
$\text{L. S. } 36^\circ\ 52'\ 12'' = 9{,}7781520 - 10$ (§ 95)
$0{,}4771220$
$= \text{Log. } 3$

L. Der gefundene Logarithme ist etwas zu groß. Woher kömt das?

S. Weil der Sinus 36° 52′ 12″ etwas zu groß ist, und nur 36° 52′ 11″ 38‴ seyn solte (§ 120).

L. Hier trit der Fall ein, wo jemand, der die Einrichtung der kleinen Tafeln nicht kennte, oder dem sie nicht gegenwärtig wäre, zu Irtum verleitet werden, und dem Logarithmen des Sinus 36° 52′ 12″ anstat 10, nur 7 abziehn könte (§ 95). Es wäre daher zu wünschen, daß man diese Einrichtung änderte; um so mehr, da durch dieselbe nicht der geringste Nutzen erzielt wird.

S. Solte die Einrichtung wirklich keinen Nutzen gewähren? Die Logarithmen entsprechen grössern und genauer berechneten Zahlen als die neben ihnen stehenden natürlichen sind, und das muß wieder auf die mit diesen Logarithmen angestellten Rechnungen Einfluß haben.

L. Dieser Meinung ist, unter Andern, der Abt Häseler, wie aus seiner Geometrie § 481 und 483 erhellt; und sie hat vermutlich die Einrichtung der Tafeln veranlasst: aber sie ist ungegründet. Wir wollen um dieses augenscheinlich darzutuhn, das vorige Exempel auf andre Art, mit den gehörigen Logarithmen, der zur Kennzahl nicht 9, sondern nur 6 hat, berechnen.

S. Log. 5 = 0,6989700
L. S. 36° 52′ 12″ = 6,7781520 — 7

0,4771220
= Log. 3.

L. Genau das vorige Resultat. Nicht die Grösse des Kopfes, sondern die Länge des Schweifs gibt Genauigkeit. Ich habe die Unmöglichkeit, ja die Schädlichkeit der Einrichtung dargetahn, man zeige mir eben so klar ihren Nutzen nur in einem einzigen Beispiele. — Nun zum Beschlusse noch die Exempel

$$p = g \times \text{Tang. } n$$

und $g = p \times \text{Cotang. } n$

durch Logarithmen.

S. $p = 4 \times \text{Tang. } 36^\circ\ 52'\ 12''$

Log. 4 = 0,6020600
L. T. 36° 52′ 12″ = 9,8750620 — 10

0,4771220
= Log. 3

$g = 3 \times \text{Cotang. } 36^\circ\ 52'\ 12''$

Log. 3 = 0,4771212
L. Cot. 36° 52′ 12″ = 10,1249390 — 10

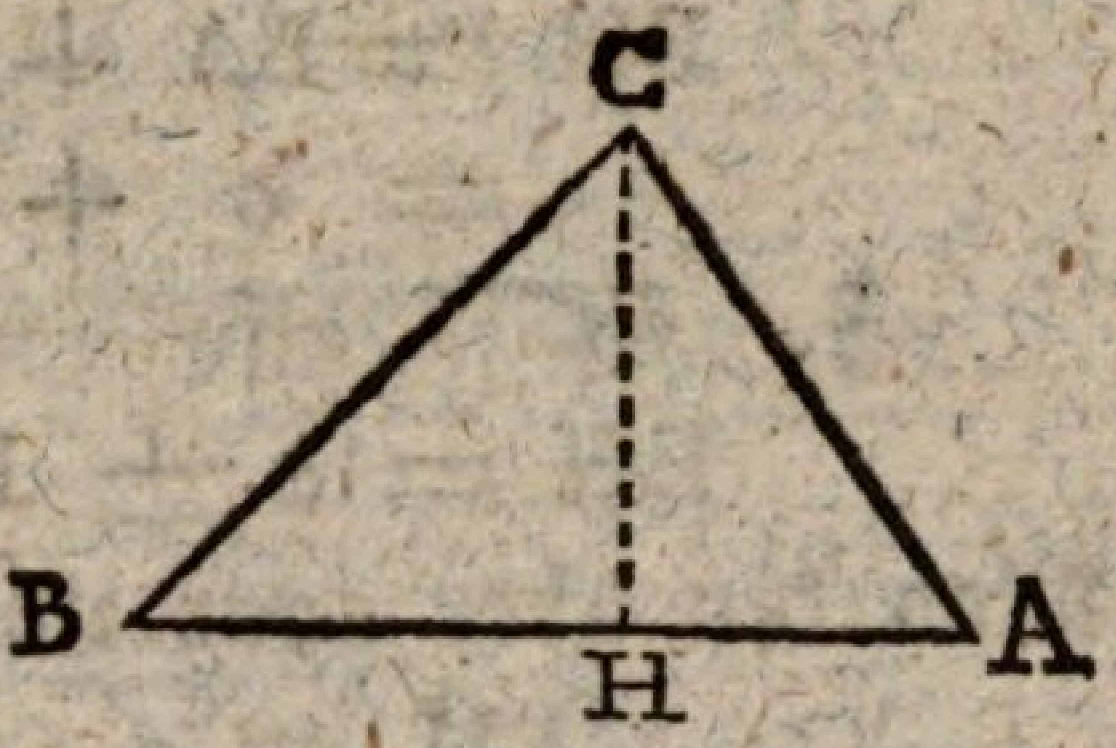
0,6020602
= Log. 4.

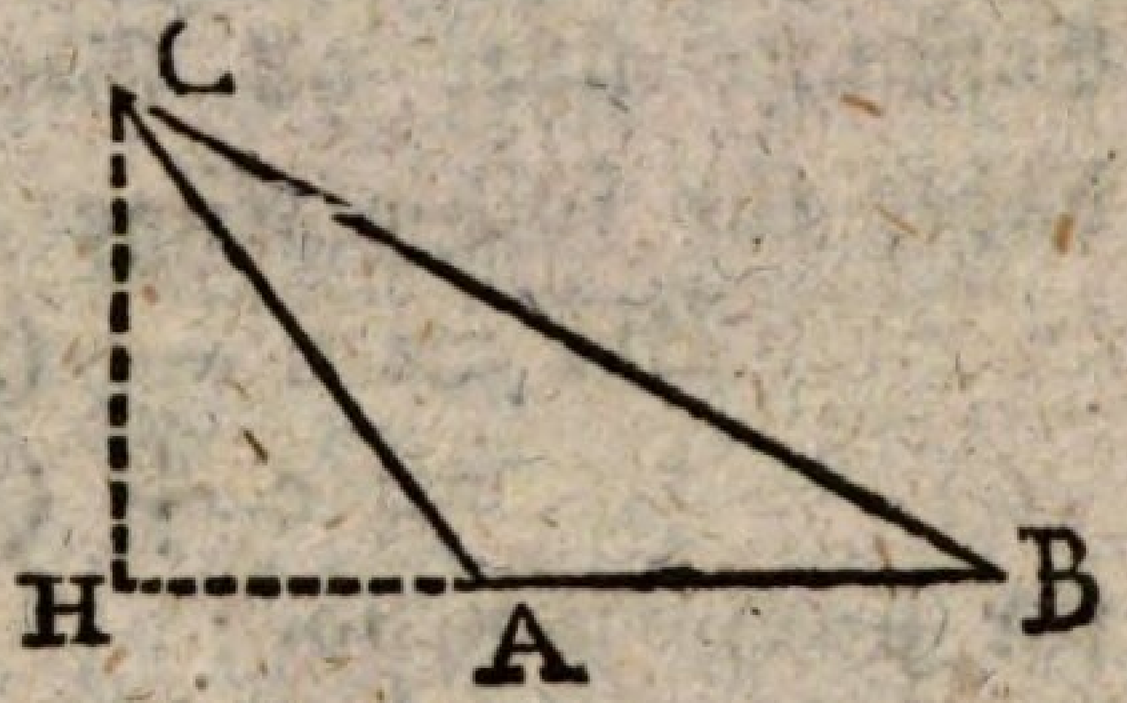
§ 128.

Vir und virzigster Saz.

L. Nun wollen wir auch schiefwinkliger Dreiekke ABC Seiten und Winkel mit einander vergleichen. Dieses geschieht mittels rechtwinkliger

Dreiekke; welche wir erhalten, wenn wir von der Spitze C bei spitzwinkligen Dreiekken auf die entgegen stehende Seite, bei stumpfwinkligen auf die verlängerte entgegen stehenden Seite, eine senkrechte Linie CH fällen. So wird das spitzwinklige Dreiekk in zwei rechtwinklige Dreiekke CHA, CHB zerschnitten; das stumpfwinklige aber durch das rechtwinklige CHA vergrössert. — Nun lasst uns bei der Höhe CH anfangen. Wie wird die gefunden?





S. CH = p = h × Sin. n (§ 126)
= b × Sin. A
= a × Sin. B

wenn nämlich die Seiten nach ihren GegenWinkeln benant werden, wie § 123.

L. Nun die Seiten, oder eigentlichen Abschnitte AH und BH!

S. AH = g = h × Cos. n (§ 126)
= b × Cos. A
BH = g = a × Cos. B.

L. Für BH lässt sich noch eine andre Formel angeben. Es ist nämlich in dem spitzwinkligen Dreiekke

BH = BA — AH
= c — b Cos. A

Wie ist es aber mit dem stumpfwinkligen? Wird diese Formel auch darauf passen?

S. Nein, denn die ist

$$BH = BA + AH$$
$$= c + b \text{ Cos. } A.$$

L. Es ist also

$$BH = c \pm b \text{ Cos. } A$$

Man kan aber auch eine der beiden Formeln

$$BH = c - b \text{ Cos. } A$$
$$\text{oder } BH = c + b \text{ Cos. } A$$

für allgemein annehmen, wenn man bedenkt, daß die Cosinusse über 90 Grad verneint sind (§ 18), und daher für spitzwinklige Dreiekke:

$$\left.\begin{aligned} BH &= c - (+ b \text{ Cos. } A) \\ &= c + (- b \text{ Cos. } A) \end{aligned}\right\} \text{ (A. § 128)}$$

für stumpfwinklige:

$$\left.\begin{aligned} BH &= c + (- b \text{ Cos. } A) \\ &= c - (+ b \text{ Cos. } A) \end{aligned}\right\} \text{ (A. § 128).}$$

L. Es sei $b = 5$; $c = 7$

$$A = 53^\circ\ 7'\ 48''\ 22'''$$

S. So ist

$$\begin{aligned} AH &= b \times \text{Cos. } A \\ &= AC \times \text{Cos. } 53^\circ\ 7'\ 48'' \\ &= 5 \times \text{Sin. } 36^\circ\ 52'\ 12'' \\ &= 5 \times 0{,}600001 \\ &= 3{,}000005 \end{aligned}$$

Für das spitzwinklige Dreiekk

$$\begin{aligned} BH &= c - b \times \text{Cos. } A \\ &= 7 - 3 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Für das stumpfwinklige Dreiekk

$$\begin{aligned} BH &= 4 - 5 \times \text{Cos. } 126^\circ\ 52'\ 12'' \\ &= 4 - 5 \times - \text{Sin. } 36^\circ\ 52'\ 12'' \text{ (§ 16. 18)} \\ &= 4 - 5 \times - 0{,}600001 \\ &= 4 - \quad - 3{,}000005 \\ &= 4 + \quad + 3 \\ &= 7 \end{aligned}$$

§ 129.

Fünf und virzigster Satz.

L. Es ist also:

$$\left.\begin{array}{l} CH = b\ \text{Sin.}\ A = a\ \text{Sin.}\ B \\ BH = c - b\ \text{Cos.}\ A = a\ \text{Cos.}\ B \end{array}\right\}\ (\S\ 128)$$

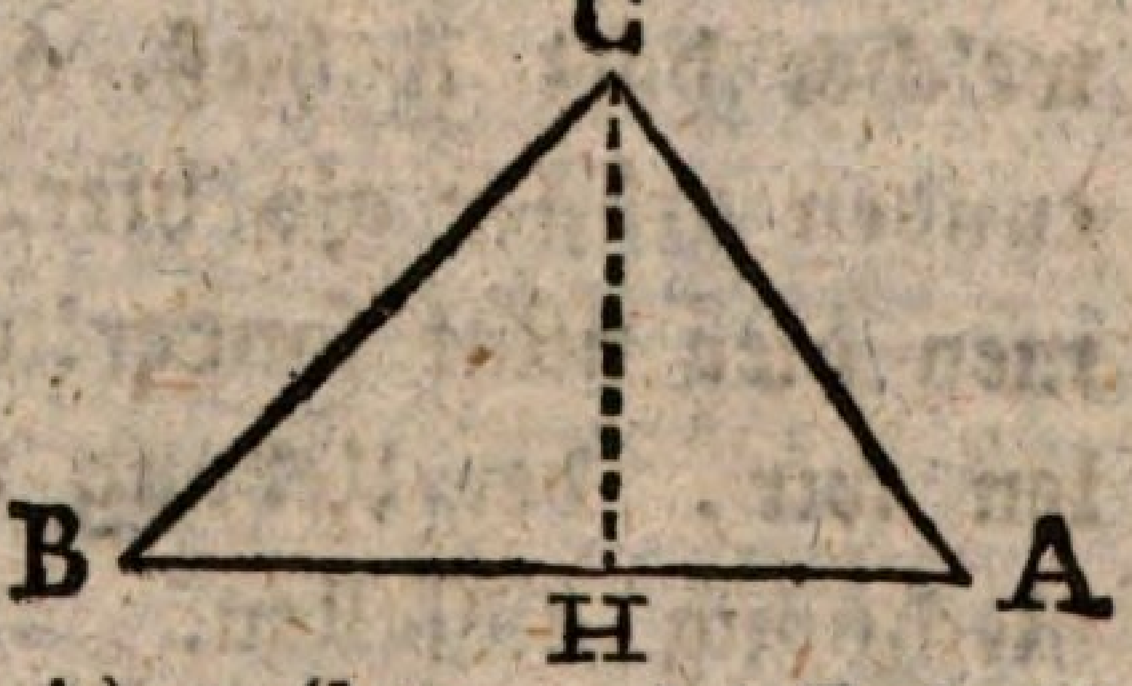
Folglich:

$$CH : BH = b\ \text{Sin.}\ A : (c - b\ \text{Cos.}\ A)$$
$$= (\times\ a\ \text{Sin.}\ B) : a\ \text{Cos.}\ B$$
$$= \text{Sin.}\ B : \text{Cos.}\ B\ (\text{A.}\ \S\ 113)$$
$$= \text{Tang.}\ B\ (\S\ 53)$$

Also:

$$\text{Tang.}\ B = (a\ \text{Sin.}\ A) : (c - b\ \text{Cos.}\ A)$$
$$= \text{Sin.}\ A : (\tfrac{c}{b} - \text{Cos}\ A)\ (\text{A.}\ \S\ 113)$$

Wer getraut sich, nach diesem Vorbilde, Formeln für Tangente C anzugeben?



S. $\text{Tang.}\ C = (c\ \text{Sin.}\ A) : (b - c \times \text{Cos.}\ A)$

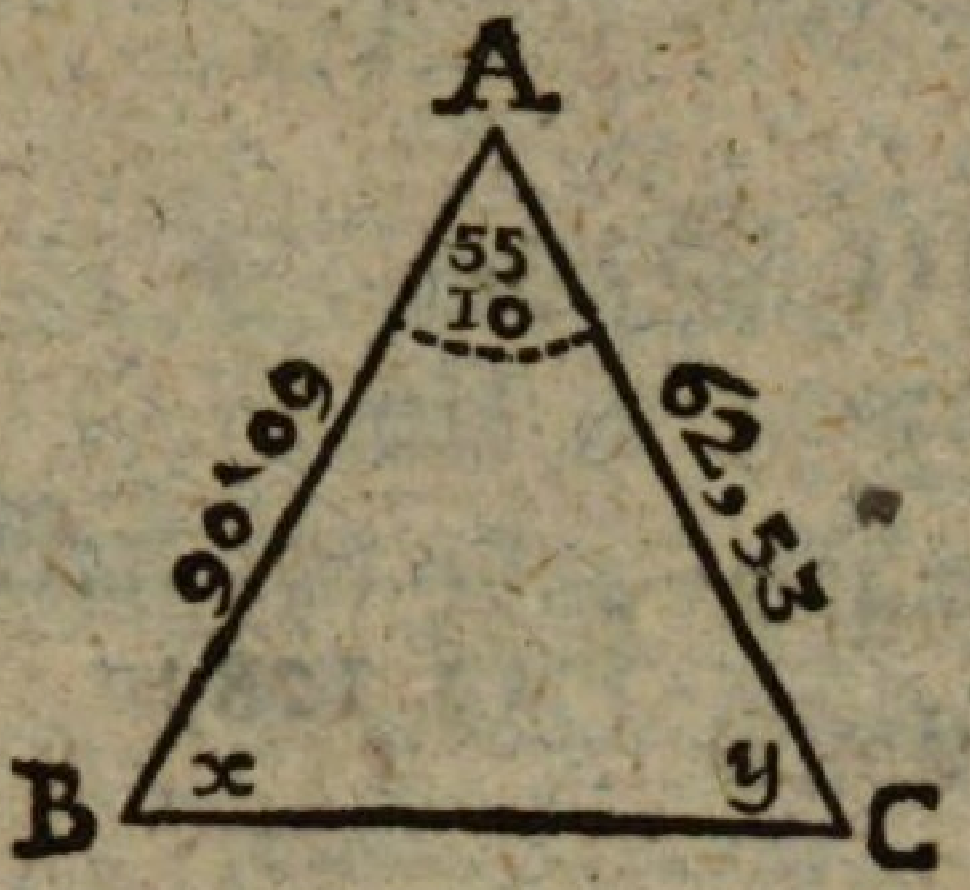
$$= \text{Sin.}\ A : (\tfrac{b}{c} - \text{Cos.}\ A).$$

L. Die Formeln

$$\text{Tang.}\ B = \text{Sin.}\ A : (\tfrac{c}{b} - \text{Cos.}\ A)$$

$$\text{Tang.}\ C = \text{Sin.}\ A : (\tfrac{b}{c} - \text{Cos.}\ A)$$

enthalten die Auflösung der Aufgabe: Aus zwei Seiten b und c eines Dreiekks ABC, und ihrem ZwischenWinkel A, die übrigen Winkel desselben zu finden, und zwar auf eine andre Art als es § 117. 120 ist gelehrt worden.



Es sei A = 55° 10′
b = 60,06
c = 62,53

Wie groß wird der Winkel C seyn? Wir wollen uns zu dieser Rechnung der natürlichen Zahlen bedienen.

S. Tang. C = Sin. A : ($\frac{b}{c}$ — Cos. A)

= S. 55° 10′ : ($\frac{60{,}06}{62{,}53}$ — Cos. 55° 10′)

= 0,8208170 : (0,9604989 — 0,5711912)

= 0,8208170 : 0,3893077

= 0,2108424

= Tang. 64° 37′ 32″.

L. § 120 fanden wir eben diesen Winkel C, welcher dort A hieß, 64° 37′ 43″; also um 11 Secunden grösser als hier. — Ungeachtet die Logarithmen hier nicht sonderlichen Vorteil gewähren, so wollen wir, der Uebung wegen, dennoch auch damit die Rechnung anstellen. Es sind mancherlei Vorsichten dabei zu beobachten. Zuerst müssen wir den Divisor in Ordnung bringen.

S. Log. 60,06 = 2,7785853 — 1 (A. § 358)
Log. 62,53 = 1,7960884

Log. (60,06 : 62,53) = 0,9824969 — 1 (A. § 355)

L. Hiervon soll auch Cos. 55° 10′ abgezogen werden. Geschähe dis durch Logarithmen, so wäre es Division (A. § 329). Wie wird man sich nun hier zu nehmen haben, um nicht zu dividiren anstat zu subtrahiren?

S. Ich muß den Logarithmen 0,9824969 — 1

wieder in seine natürliche Zahl verwandeln, und dan den Abzug verrichten.

$$0,9824969 - 1 = \text{Log. } 0,9605$$
$$\text{Cos. } 55^\circ\ 10' = 0,5711912$$
$$0,3893$$

$$\text{Von Log. Sin. } 55^\circ\ 10' = 9,9142584 - 10$$
$$\text{Abzug Log. } 0,3893 = 0,5902844 - 1$$
$$9,3239740 - 9$$
$$= 0,3239740$$
$$= \text{Log. Tang. } 64^\circ\ 37,\ 35''.$$

§ 130.

L. $\text{Cot. B} = 1 : \text{Tang. B}$ (§ 53)

$$= \frac{1}{1} \frac{: \text{Sin. A}}{c : b - \text{Cos. A}} \text{ (§ 129)}$$
$$= \frac{1}{1} \times \frac{c : b - \text{Cos. A}}{\text{Sin. A}} \text{ (A. § 99)}$$
$$= (c : b - \text{Cos. A}) : \text{Sin A}$$
$$= \frac{c : b}{\text{Sin. A}} - \frac{\text{Cos. A}}{\text{Sin. A}}$$
$$=; \frac{c}{b} \frac{\text{Sin. A}}{1} = \text{Cotang. A (§ 53)}$$
$$= \frac{c}{b} \frac{1}{\text{Sin. A}} - \text{Cotang. A}$$
$$= \frac{c}{b} \text{ Cosec. A (§ 53)} - \text{Cotang. A}$$

Welches ist nun hiernach Cotangente C?

S. $\text{Cotang. C} = \frac{b}{c} \times \text{Cosec. A} - \text{Cotang. A}$

L. Diese Formel scheint vor der § 129 noch einigen Vorzug zu haben, darin daß anstat zwei Mal zu dividiren, hier nur ein Mal dividirt, und ein Mal multiplicirt wird. Es sei wie vorhin:

$$A = 55^\circ\ 10'$$
$$b = 60,06$$
$$c = 62,53$$

und nun wollen wir nach dieser zulezt gefundenen Formel C berechnen, und das mit natürlichen Zahlen.

S. Cotang. $C = \frac{c}{b} \times$ Cosec. A — Cotang. A

$= \frac{60{,}06}{62{,}53} \times$ Cosec. $55^\circ\ 15'$ — Cot. $55^\circ\ 10'$

$= 0{,}9604989 \times 1{,}2182983 - 0{,}6958813$

$= 1{,}1701541 \qquad - 0{,}6958813$

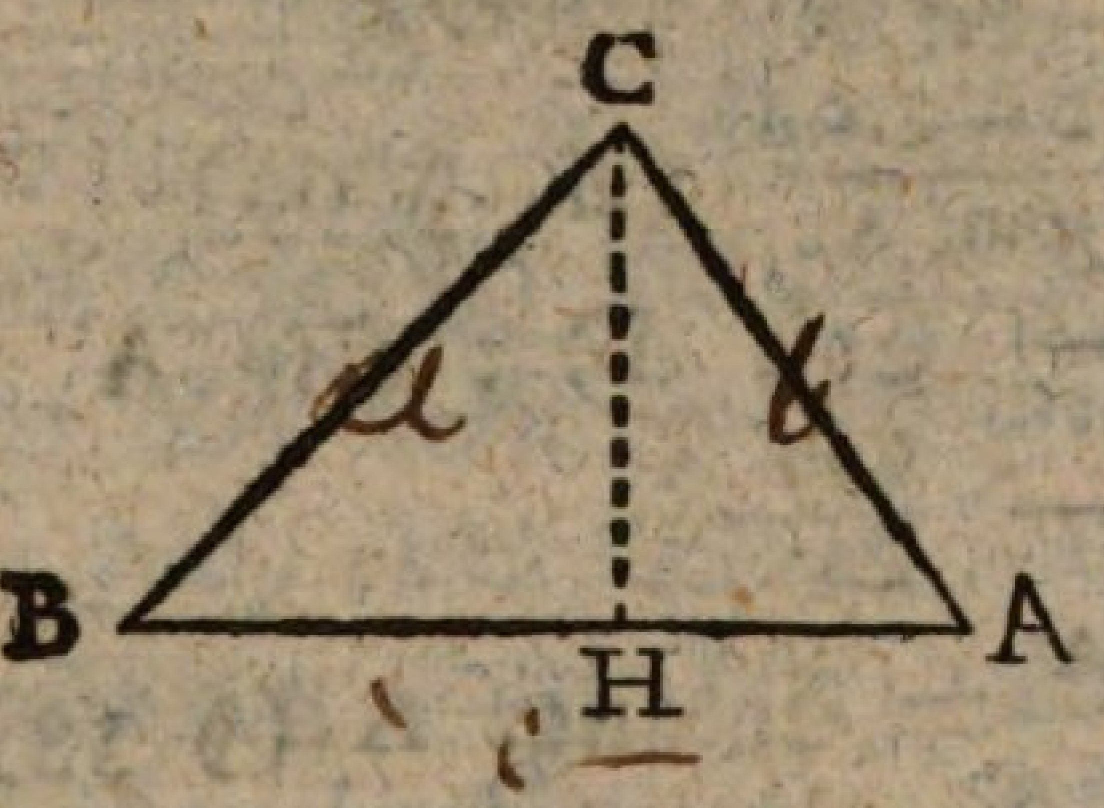
$= 0{,}4742928$

= Tangente $25^\circ\ 22'\ 28''$

= Cotang. $64^\circ\ 37'\ 32''$,

§ 131.

Sechs und virzigster Saz.



L. In einem Dreiekke ABC ziehn wir die senkrechte Linie CH. Welches sind nun die Formeln für die Höhe CH, und den Abschnitt BH?

S. CH = b × Sin. A
BH = c — b Cos. A } (§ 128).

L. Und für $BC^2 = a^2$?

S. $a^2 = CH^2 + BH^2$ (G. § 160)

= (b × Sin. A)^2 + (c — b × Cos. A)^2

= b^2 (S. A)^2 + c^2 — 2bc Cs. A + b^2 Cs. A)^2

= b^2 [(S. A)^2 + (Cs. A)^2] + c^2 — 2bc Cs. A.

L. Die Formel leidet noch Abkürzung für den Halbmesser = 1. — Wie groß sind die Quadrate des Sinus und des Cosinus zusammen?

S. (Sin. x^2)^2 + (Cos. x^2)^2 = rr (§ 19).

L. Ist nun r = 1, so ist : :

S. $(\text{Sin. } A)^2 + (\text{Cos. } A)^2 = 1^2 = 1$.

L. Also für den Halbmesser = 1 wird die für a^2 gefundene Formel : : ?

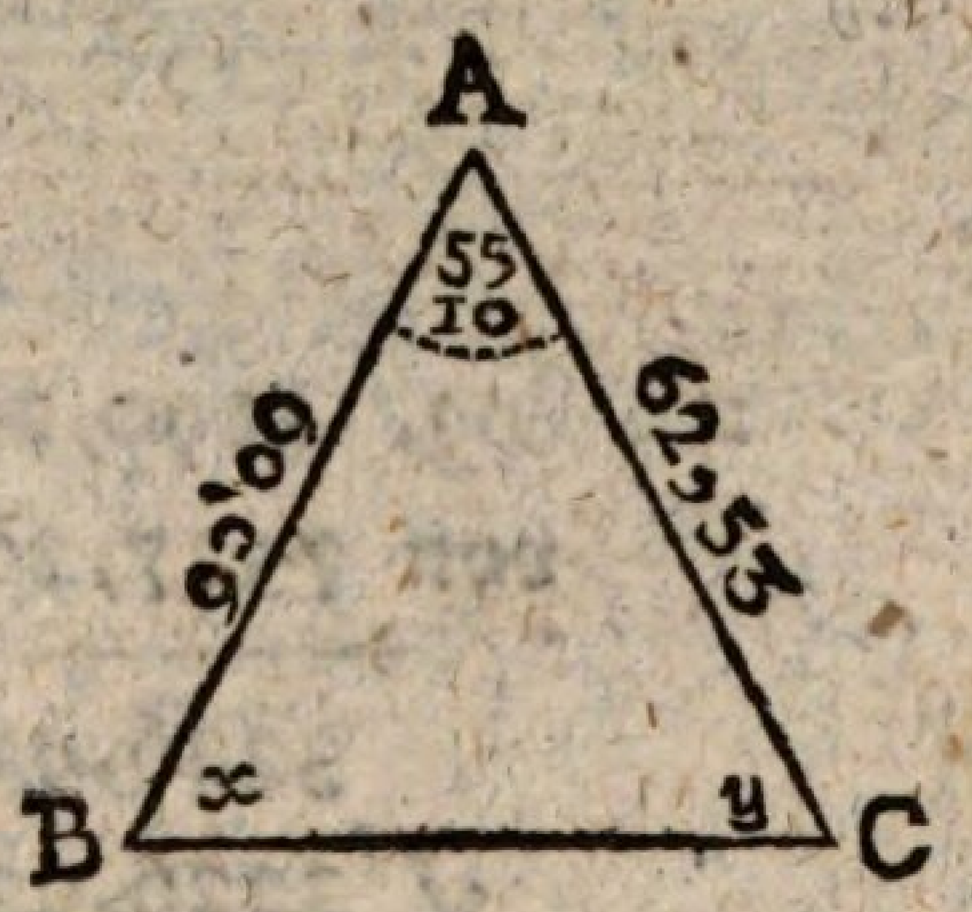
S. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{ Cos. } A$.

L. Also $a = \sqrt{(b^2 + c^2 - 2bc \text{ Cos. } A)}$ wie würde diese Formel als Aufgabe lauten?

S. Aus zwei Seiten b und c eines Dreiekks und ihrem ZwischenWinkel A, die dritte Seite a zu finden.

L. Es sei wie § 130:

$A = 55° \, 10'$
$b = 60{,}06$
$c = 62{,}53$



wie groß wird a seyn? — Wie wird die Rechnung am bequemsten geführt? durch natürliche Zahlen? oder durch künstliche?

S. Es gibt zu addiren, zu subtrahiren, zu multipliciren, und QuadratWurzel auszuziehn. Das Addiren und Subtrahiren kan nicht anders als durch natürliche Zahlen geschehn. Zu den übrigen Verrichtungen scheint der Gebrauch der Logarithmen vorteilhafter zu seyn.

L. Ganz richtig! Zuerst brauchen wir die Quadrate von 60,06 und von 62,53, wobei zwar die Logarithmen schon mit Vorteil zu gebrauchen wären (A. § 328). Da indessen diese Zahlen nicht groß sind, so wollen wir sie auf natürliche Art berechnen, und die LogarithmenRechnung für den Fall versparen, da etwan ein Irtum unterliefe, der nicht sogleich zu berichtigen wäre.

S. $b^2 = 3607,2036$

$c^2 = 3910,0009$

$b^2 + c^2 = 7517,2045$

L. Die Findung aber des Productes $2 \times 60,06 \times 62,53 \times$ Cos. 55° 10′ werden Logarithmen vorteilhaft.

S. Log. 60,06 = 1,7785853

Log. 62,53 = 1,7960884

Log. Cos. 55° 10′ = 9,7567815 — 10

Log. 2 = 0,3010300

13,6324852 — 10

= 3,6324852

= Log. 4290,276 = Log. 2bc Cos. 55° 10′

von 7517,204 = $b^2 + c^2$

3226,928 = $b^2 + c^2 - 2bc$ Cos. 55° 10′

$\sqrt{3226,928} = 56,806$: :

L. Beinahe wie § 120.

§ 132.

L. Gesetzt A wäre ein rechter Winkel, wie groß wäre dan a^2?

S. Ist A = ∟, so ist $a^2 = b^2 + c^2$ (G. § 160).

L. Wie stimt das aber mit der Formel $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc$ Cosinus A?

S. Für A = 90° ist Cos. A = 0 (17),

folglich 2bc × Cos. A = 2bc × 0 = 0

folglich $a^2 = b^2 + c^2 - 0 = b^2 + c^2$.

L. Aber angenommen A wäre stumpf, wie wäre dan a^2? Grösser oder kleiner als $a^2 + b^2$?

S. Es wäre grösser.

L. Und wie lässt sich das mit der Formel

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{ Cos. } A.$$

vereinigen?

S. Es ist der Fall wie § 128. Ist $A > 90°$, so ist Cosinus A verneint, und die Formel wird

$$a^2 = b^2 + c^2 - (- 2bc \text{ Cos. } A)$$
$$= b^2 + c^2 + (+ 2bc \text{ Cos. } A) \text{ (A. § 128).}$$

L. Also für $A = \llcorner$,

$$a^2 = b^2 + c^2;$$

für $A < \llcorner$,

$$a^2 = b^2 \times c^2 - 2bc \text{ Cos. } A;$$

für $A > \llcorner$,

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \text{ Cos. } A.$$

§ 133.

Sieben und virzigster Satz.

L. $b^2 + c^2 - 2bc$ Cos. $A = a^2$ (§ 131. 132). In dieser Gleichung wollen wir Cosinus A ganz allein auf eine Seite des Gleichheits-Zeichens zu schaffen suchen.

S. $b^2 + c^2 - 2bc \text{ Cos. } A = a^2$

$$-2bc \text{ Cos. } A = a^2 - b^2 - c^2 \text{ (A. § 51)}$$

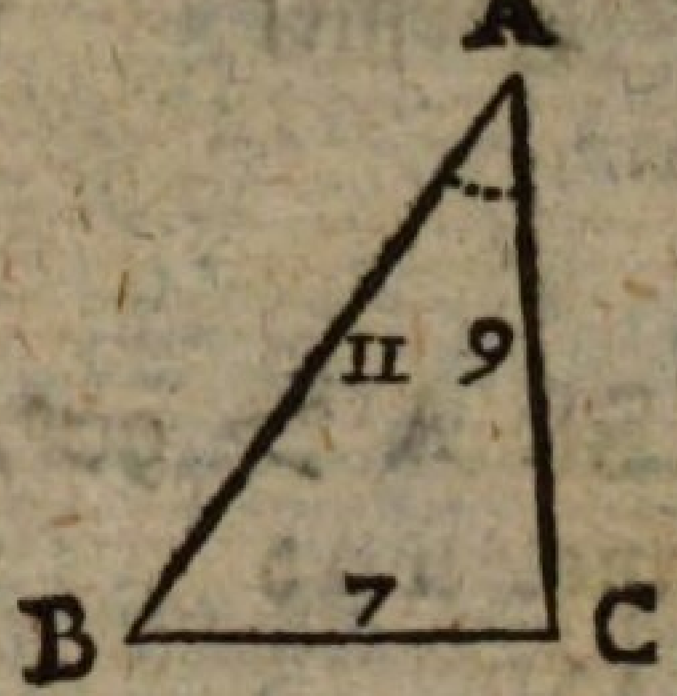
$$+2bc \text{ Cos. } A = - a^2 + b^2 + c^2 \text{ (A. § 193)}$$

$$\text{Cos. } A = (- a^2 + b^2 + c^2) \text{ 2bc}$$

L. Diese Formel

$$(b^2 + c^2 - a^2) : 2bc = \text{Cos. } A$$

gibt eine kürzere Auflösung der Aufgabe § 124: Aus drei Seiten a, b, c, eines Dreiekks die Winkel zu finden. Es sei



a = 7
b = 9
c = 11
wie groß ist A?

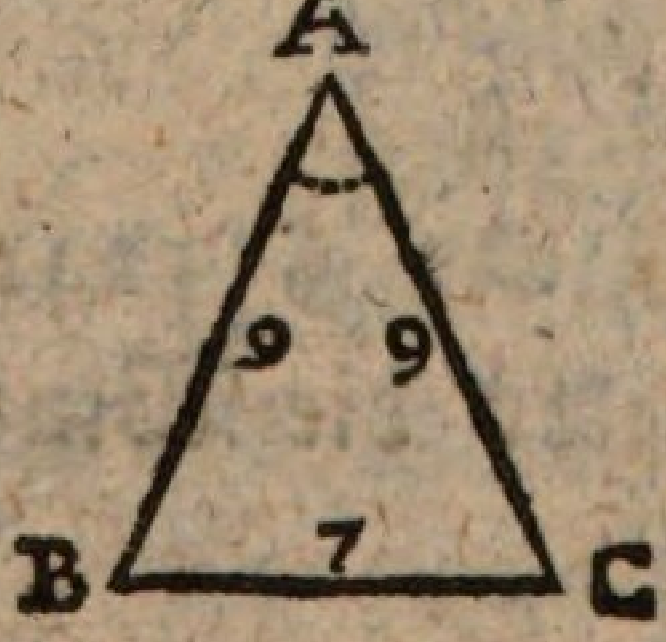
S. Cos. A = $(b^2 + c^2 - a^2) : 2bc$
$= (9^2 + 11^2 - 7^2) : 2 \times 9 \times 11$
$= (81 + 121 - 49) : 2 \times 99$
$= (202 - 49) : 198$
$= 153 : 198$
$= 0,77272727$ = =
= Sinus 50° 35′ 58″
= Cosinus 39° 24′ 2″ (§ 124).

L. Aber wie finde ich den Winkel B?

S. Cos. B = $(a^2 + c^2 - b^2) : 2ac$
$= (49 + 121 - 81) : 2 \times 7 \times 11$
$= (170 - 81) : 2 \times 77$
$= 89 : 154$
$= 0,57792208$
= Sinus 35° 18′ 16″
= Cosinus 54° 41′ 44″

§ 134.

L. Da in gleichschenkligen Dreiekken b gleich c ist, und man folglich für c immer b setzen kan; so wird die Formel noch einfacher.



S. Cos. A = $(bb + cc - aa) : 2bc$
$= (2bb - aa) : 2bb$
$= 1 - (aa : 2bb)$

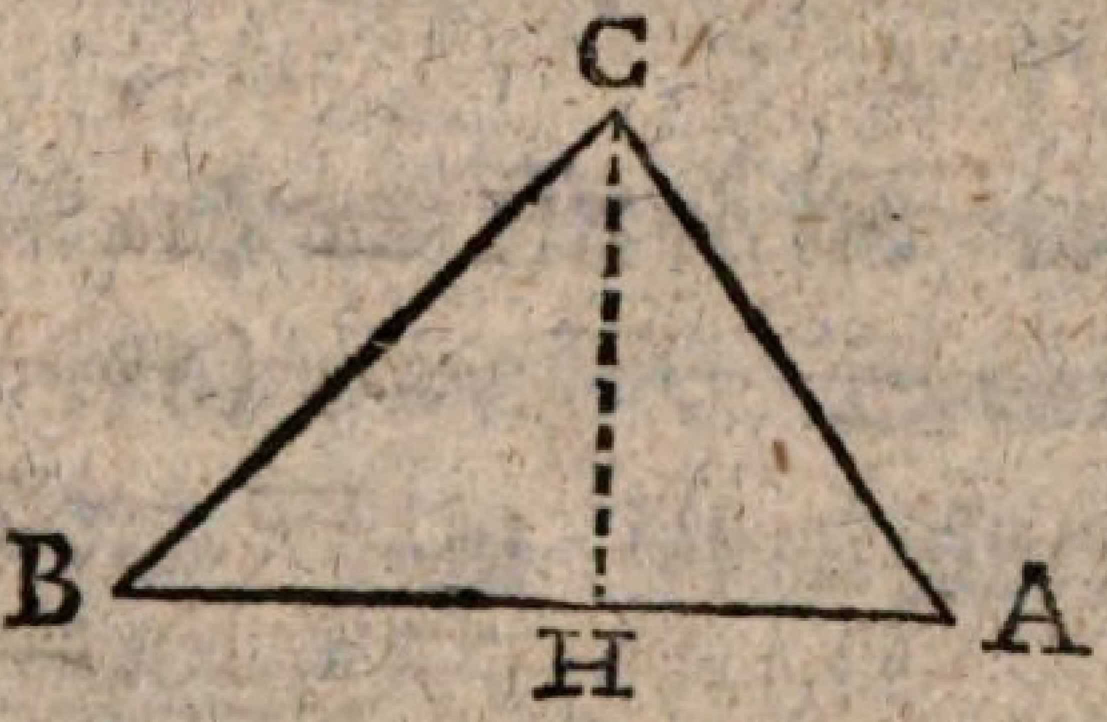
L. Es sei a = 7
b = 9

S. So ist Cos. A $= 1 - (aa : 2bb)$
$= 1 - (49 : (2 \times 81)$
$= 1 - (49 : 162)$
$= \frac{162}{162} - \frac{49}{262}$
$= \frac{113}{162} = 0{,}6975308$ = =
= Sin. $44^\circ\ 14'$
= Cos. $45^\circ\ 46'$.

§ 135.

Acht und virzigster Satz.

L. Wenn eines Dreiekks ABC eine Seite c, durch eine von der entgegen stehenden Spitze C auf sie gezogene senkrechte Linie in zwei Abschnitte AB, BH zerschnitten wird; so ist



AH = b Cos. A (§ 128)
$= b\,(b^2 + c^2 - a^2) : 2bc$ (§ 133)
$= (b^2 + c^2 - a^2) : 2c$ (A. § 113. 119)

Hiernach wollen wir für
BH = BA — AH
Formeln suchen.

S. $BH = c - (bb + cc - aa) : 2c$
$= \frac{2cc}{2c} - \frac{bb}{2c} - \frac{cc}{2c} + \frac{aa}{2c}$ (A. § 131)
$= \frac{cc}{2c} - \frac{bb}{2c} + \frac{aa}{2c}$
$= (aa - bb + cc) : 2c$
$= (aa - bb) : 2c + \frac{c}{2}$.

L. Die Formel als Aufgabe eingekleidet, würde lauten:

S. Aus den drei Seiten eines Dreiekks die Abschnitte einer Grundlinie zu finden.

L. Es sei $a = \sqrt{32} = 5,6568544$

$b = 5$

$c = 7$

Hieraus wollen wir für das spitzwinklige Dreiekk ABC die Abschnitte AH und BH berechnen.

S. $AH = (bb + cc - aa) : 2c$

$= (25 + 49 - 32) : 14$

$= (74 - 32) : 14$

$= 42 : 14$

$= 3$

*

$BH = (aa - bb) : 2c + \frac{c}{2}$

$= (32 - 25) : 14 + \frac{7}{2}$

$= 7 : 14 + 3 + \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{2}$

$= 4.$

§ 136.

Neun und virzigster Saz.

L. Es ist in der vorigen Zeichnung

$BH - AH = aa - bb) : 2c + \frac{c}{2} - (bb + cc - aa) : 2c$

Diese Formel wollen wir nun zu vereinfachen suchen.

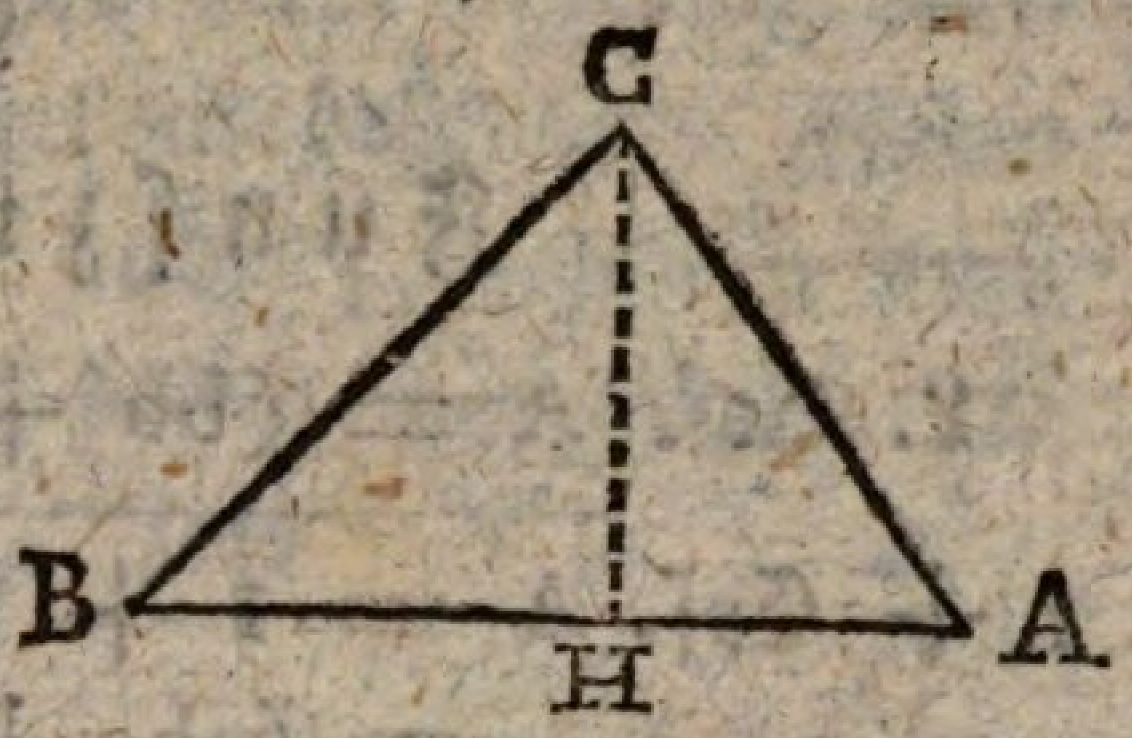
S. $BA - AH = \frac{aa}{2c} - \frac{bb}{2c} + \frac{cc}{2c} - \frac{bb}{2c} - \frac{cc}{2c} - \frac{aa}{2c}$

(A. § 131)

$= \frac{2aa}{2c} - \frac{2bb}{2c}$

$= \frac{aa}{c} - \frac{bb}{c} = (aa - bb) : c.$

L. Da haben wir eine Formel für den Unterschied der Abschnitte. Wie lautet sie in Worte gekleidet?



S. Der Unterschied der Quadrate der beiden kůzern Seiten eines Dreiekks, dividirt durch die långste Seite, gibt den Unterschied der Abschnitte der långsten Seite.

L. Also $(aa - bb) : c = BH - AH$

$[(a + b)(a - b)] : c = BH - AH$ (A. § 144)

$(a + b)(a - b) = (BH - AH) c$ (A. § 51)

$c .. (a + b) = (a - b) .. (BH - AH)$ (A. § 285)

Da ist eine zweite Formel für BH — AH. Wie låßt sich die übersetzen?

S. Die långste Seite eines Dreiekks verhålt sich zur Summe der beiden andern Seiten, wie der Unterschied derselben zum Unterschiede der Abschnitte der långsten Seite.

L. Im Grunde ist dieses die vorige Regel: denn

$c .. (a + b) = (a - b) .. (BH - AH)$

$BH - AH = (a + b)(a - b) : c$ (A. § 294)

$= (aa - bb) : c$ (A. § 144)

Es sei $a = \sqrt{32}$
$b = 5$
$c = 7.$

S. So ist $BH - AH = (aa - bb) : c$
$= (32 - 25) : 7$
$= 7 : 7 = 1.$

§ 137.

Funfzigster Satz.

L. $\mathrm{Cos.}\,A = (bb + cc - aa) : 2bc$ (§ 133)

$$1 + \mathrm{Cos.}\,A = 1 + (bb + cc - aa) : 2bc$$
$$= (2bc + bb + cc - aa) : 2bc \text{ (A. § 73)}$$
$$= [(a + b + c)\,(a + b + c)] : 2bc$$

Nun wird $1 - \mathrm{Cosin.}\,A$ auf ähnliche Art behandelt.

S. $$1 - \mathrm{Cos.} = 1 - (bb + cc - aa) : 2bc$$
$$= (2bc - bb + cc - aa) : 2bc$$
$$= [(a + b - c)\,(a - b + c)] : 2bc$$

L. $$(1 + \mathrm{Cos.}\,A)\,(1 - \mathrm{Cos.}\,A) = 1 - (\mathrm{Cos.}\,A)^2$$
$$= (\mathrm{Sin.}\,A)^2 \text{ (§ 51)}$$

Nun werden für $1 + \mathrm{Cosin.}\,A$ und $1 - \mathrm{Cosin.}\,A$ die gefundenen Formeln gesetzt:

S. $$\frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{2bc} \times \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$
$$= (\mathrm{Sin.}\,A)^2$$

L. Welches ist nun für Sinus A die Formel?

S. $$\frac{\sqrt{[(a+b+c)(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)]}}{2bc}$$
$$= \mathrm{Sin.}\,A.$$

L. Was lehrt diese Gleichung?

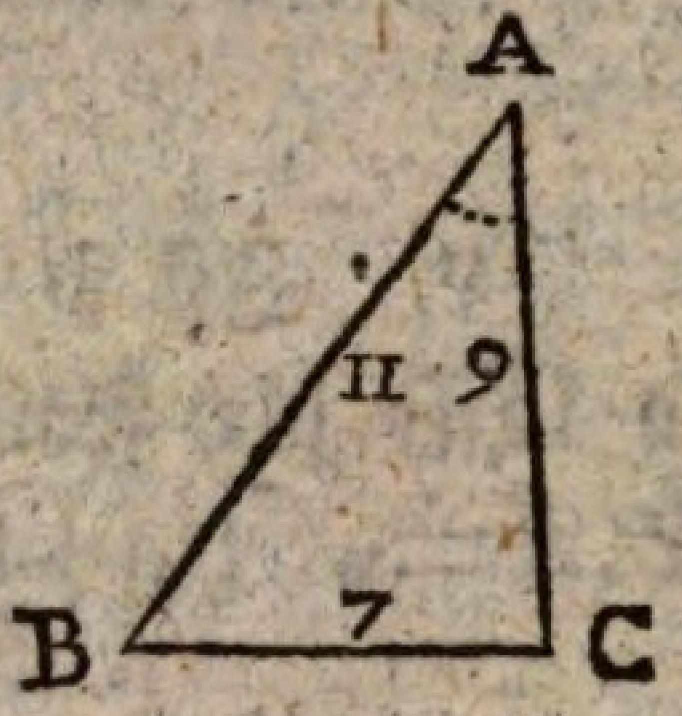
S. Aus drei Seiten eines Dreiekks den Winkel desselben zu finden.

L. Also im Grunde mit § 133 einerlei. Wie wird die Rechnung am bequemsten geführt?

S. Da hier viel zu multipliciren, zu dividiren, und Wurzel auszuziehn ist; so sind die Logarithmen bequem.

L. Das ist der HauptVorzug dieser Auflösung. Ausserdem ist es noch gut, wie Kästner sagt (Trig.

15ter Satz), von einer Aufgabe mehr als eine Auflösung zu kennen, nicht nur weil in besondern Fällen die eine bequemer ist als die andre; sondern auch damit man nicht etwan die, von denen man nichts gehört hat, anstaune. Es sei, wie § 133:



$a = 7,$

$b = 9,$

$c = 11.$

Wie groß wird der Winkel A seyn?

S. $\sqrt{[(a+b+c)(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)]} : 2bc$

$= \sqrt{[(7+9+11)(-7+9+11)(7+9-11)(7-9+11)]}$
$: 2 \times 9 \times 11$

$= \sqrt{(27 \times 13 \times 5 \times 9)} : 198$

Log. 27 = 1,4313638
Log. 13 = 1,1139433
Log. 5 = 0,6989700
Log. 9 = 0,9542425

4,1985196 = Log. $(27 \times 13 \times 5 \times 9)$
2,0992598 = Log. $\sqrt{(27 \times 13 \times 5 \times 9)}$
(A. § 328).

*

Log. 2 = 0,3010300
Log. 9 = 0,9542425
Log. 11 = 1,0413927

2,2966652 = Log. $(2 \times 9 \times 11)$
3,0992598 — 1 (A. § 359)

0,8025946 = Log. Sin. A.

L. Richtig! 0,8025946 ist der Logarithme des Sinus A: aber für welchen Halbmesser?

S. Für den Halbmesser 1 (§ 126).

L. Welches ist nun der TafelLogarithme?

S. 10,8025946 = TafelLog. Sin. 39° 24′ 2″ (§. 127).

§ 138.

L. Ist b = c, und das Dreiekk gleichschenklig, so lässt die Formel

$$\text{S. } A = \sqrt{[(a+b+c)(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)]} : 2bc$$

sich abkürzen.

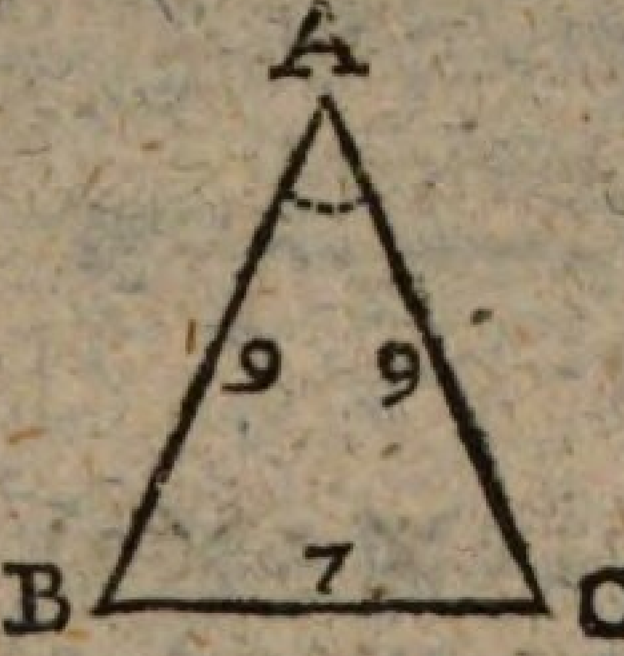
S. $\text{Sin. } A = \sqrt{[(a+2b)(-a+2b)(aa)]} : 2bb.$

L. Noch kürzer wird die Formel, wenn das Dreiekk gleichseitig, und a = b = c ist.

S. $\text{Sin. } A = \sqrt{(3a \times a \times a \times a)} : 2aa$

$= (\sqrt{3})\, aa : 2aa$

$= \sqrt{3} : 2$



L. Es sei a = 7,
b = c = 9:
wie groß ist A?

S. $\text{Sin. } A = \sqrt{[(a+2b)(2b-a)\, aa]} : 2bb$

$= \sqrt{[(7+2\times 9)(2\times 9-7)7^2]} : 2\times 9^2$

$= \sqrt{[(7+18)(18-7)\, 49]} : 2\times 81$

$= \sqrt{(25 \times 11 \times 49)} : 162$

Log. 25 = 1,3979400
„ „ 11 = 1,0413927
„ „ 49 = 1,6901961

4,1295288 = Log. (25 × 11 × 49)
2,0647644 = Log. √(25 × 11 × 49)

Log. 162 = 2,2095150

0,8552494 — 1 (A. § 359)
9,8552494 = Taf.Log.Sin. 45° 46′.

L. Wie § 134. — Es sei

$$a = b = c = 9:$$

wie groß ist Winkel A?

S. Wenn $a = b = c$, so ist $A = 60^\circ$ (G. § 124).

L. Das ist richtig, wir wollen aber die Rechnung demungeachtet machen.

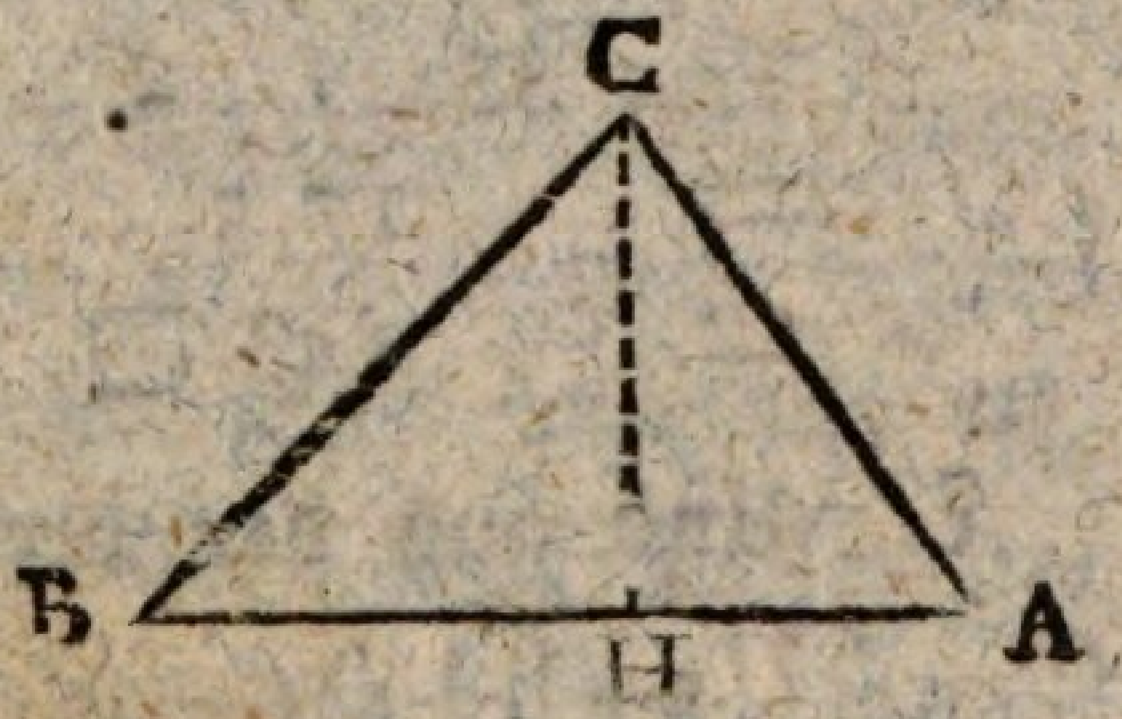
S. $\sqrt{3} : 2 = 1{,}7320508 : 2$
$= 0{,}8660254$
$=$ Sinus 60°.

§ 139.

Ein und funfzigster Satz.

L. Es sei $\sqrt{[(a+b+c)(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)]} = u$; so ist Sinus A = = ?

S. Sin. $A = u : 2bc$ (§ 137).



L. $CH = b$ Sin. A
$= b\,(u : 2bc)$
$= u : 2c$

Welches ist die Formel für den Flächen-Inhalt eines Dreiekks ABC?

S. $\triangle ABC = \frac{1}{2}\, AB \times CH$ (G. § 310)
$= \frac{c}{2} \times b$ Sin. A
$= \frac{c}{2} \times u : 2c$
$= \sqrt{[(a+b+c)(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)]} : 4.$

L. Da haben wir zwei geschikte Formeln für den Inhalt der Dreiekke:

$\triangle ABC = (c : 2)\, b$ Sin A
$= \sqrt{[(a+b+c(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)]} : 4$

Was wird in der ersten als bekant vorausgesezt?

S. Zwei Seiten, b und c und ihr Zwischen-Winkel A.

L. Und in der zweiten?

S. Alle drei Seiten.

L. Der Inhalt eines Dreiekks also wird gefunden, 1) aus zwei Seiten und ihrem ZwischenWinkel: und 2) aus allen drei Seiten.

Es sei $a = \sqrt{32} = 5{,}6568544$
$b = 5$
$c = 7$
$\angle A = 53^\circ\ 7'\ 48''\ 22'''$.

Zuerst wollen wir den Inhalt auf die erste Art, aus den Seiten b und c, und ihrem Zwischen-Winkel A, suchen.

S. $(c : 2) \times b \times \text{Sin. } A$
$= (7 : 2) \times 5 \times \text{Sin. } 53^\circ\ 7'\ 48''\ 22'''$
$= 35 : 2. \times 0{,}8$
$= 17{,}5 \times 0{,}8$
$= 14^\circ \square = \text{Inhalt } \triangle ABC.$

L. Und aus den drei Seiten?

S. $\sqrt{[(a+b+c)(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)}:4$
$=\sqrt{[(17{,}656854 \times 6{,}343145 \times 3{,}656854 \times 7{,}656854)]}:4$

L. Es fält in die Augen, daß hier die LogarithmenRechnung die bequemste ist. — Da der erste Factor eine Ziffer mehr hat als die übrigen, so wollen wir ihn durch 2 dividiren.

S. $17{,}656854 : 2 = 8{,}828427.$

L. Da nun $8{,}828427 \times 2 = 17{,}656854$, so können wir die Logarithmen auf eine DecimalZiffer mehr in der Tafel finden, wenn wir anstat 17,656854, die Factoren $8{,}828427 + 2$ brauchen.

S. Log. 8,828427 = 0,9458833
" " 2 = 0,3010300
" " 6,343145 = 0,8023047
" " 3,656854 = 0,5631077
" " 7,656854 = 0,8840504

Log. u^2 = 3,4963761

Log. u = 1,7481880 = Log. 56

u : 4 = 56 : 4 = 14° □ = △ ABC.

L. Zum Ueberfluß wollen wir den Flächen-Inhalt auch geometrisch berechnen. Es ist nämlich

AB = 7, CH = 4.

S. (AB × ½ CH) = 7 × 2 = 14 = △ ABC (G. § 310).

L. Die trigonometrische Auflösung ist für die Ausübung brauchbarer als die geometrische. Denn erstens gibt sie den Inhalt des Dreiekks ohne Zeichnung, welche ganz ohne Fehler zu verfertigen wegen Unvollkommenheit der Werkzeuge nicht möglich ist. Zweitens: Gesetzt das Dreiekk wäre ohne Fehler gezeichnet, so ist noch die senkrechte Linie CH zu ziehn, und zu messen, welches wiederum ohne Fehler nicht abgeht.

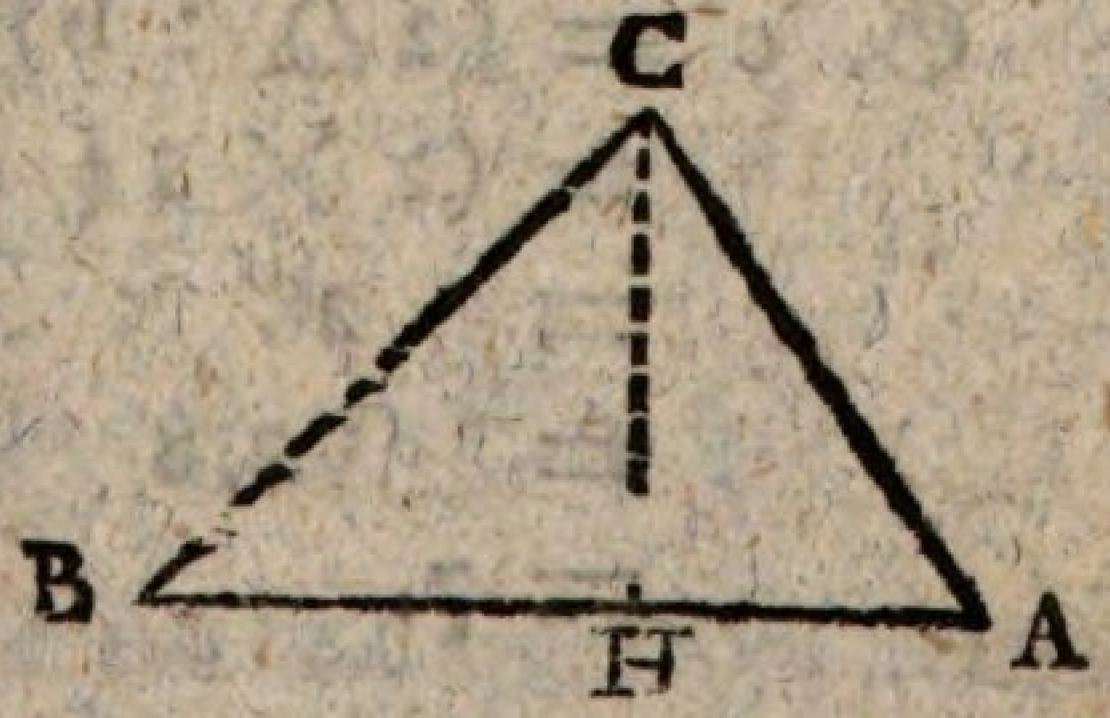
§ 140.

Zwei und funfzigster Satz.

L. Wir wollen den Inhalt eines Dreiekks ABC durch △ bezeichnen: so ist

△ = $\frac{c}{2}$ b Sin A (§ 139)
= bc Sin. A : 2

bc Sin. A = 2△
Sin. A = 2△ : b



Dieses in Worte übertragen heißt : : ?

S. Aus dem Inhalte, und zwei Seiten b und c eines Dreiekks ABC, kan man den dazwischen liegenden Winkel A finden.

L. Da auch bc Sin. A = 2△ (§ 140)

so ist c $= \frac{2\triangle}{b \text{ Sin. A}}$

$= \frac{2\triangle}{b} \times \frac{1}{\text{Sin. A}}$

$= (2\triangle : b) \times$ Cosec. A (§ 51)

Was bedeutet das?

S. Aus dem Inhalte und einer Seite b, und einem Winkel A, eines Dreiekks ABC die Seite c desselben zu finden.

L. Es sei △ = 14
b = 5
c = 7

welches ist ∠ A?

S. Sin. A = 2△ : bc
= 2 × 14 : (5 × 7)
= 28 : 35 —
= 0,8 = Sin. 53° 7′ 48″ 22‴.

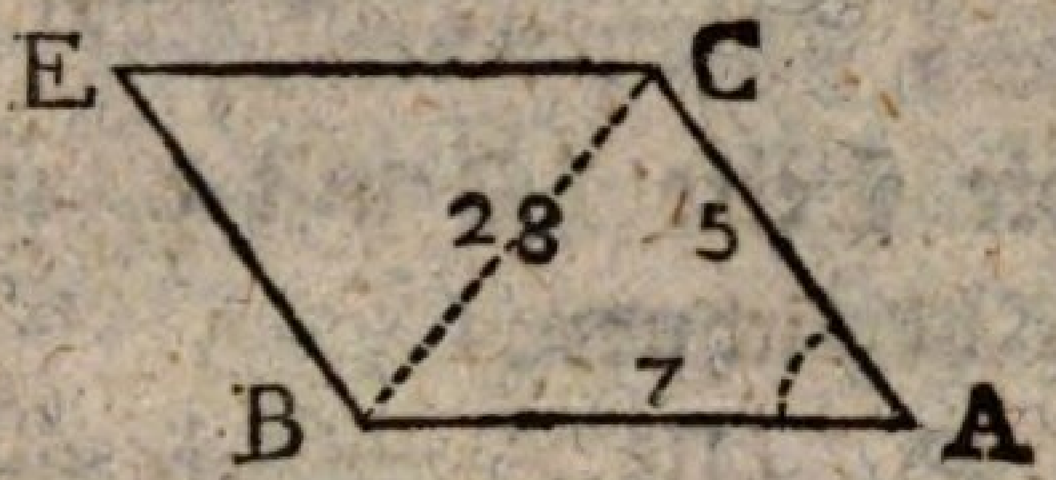
L. Es sei △ = 14
b = 5
A = 53° 7′ 48″ 22‴;

welches ist c?

S. c = (2△ : b) × Cosec. A
= (2 × 14 : 5) × Cos. 53° 7′ 48″ 22‴
= 28 : 5 × Sec. 36° 52′ 11″ 38‴
= 2,8 × 1,25
= 7.

§ 141.

Drei und funfzigster Satz.



L. Es wird gegeben der Inhalt eines Parallelogramms ABC = 28° ▭, und zwei seiner Seiten AB = 7, und AC = 5: welches ist ihr ZwischenWinkel A?

S. Sin. A = 2 △ ABC : bc (§ 140)
= ▭ AE (S. § 133) : (AC × AB)
= 28 : (5 × 7
= 28 : 35
= 0,8 = Sin. 53° 7′ 48″ 22‴

L. Ist A bekant, so ist es auch E (S. § 133). B und C (S. § 125.) — Wie groß z. B. ist hier B?

S. A = 53° 7′ 48″ 22″
A + E = 106 15 36 60
A + B + E + C = 359 59 59 60
B + C = 253 44 23 16
B = C = 126° 52′ 11″ 8‴.

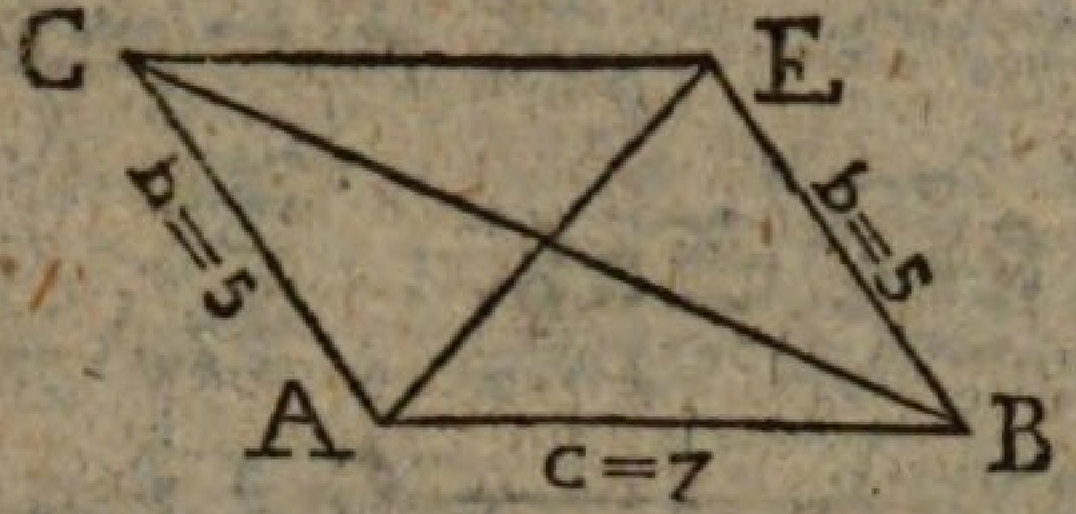
L. Aus dem Inhalte eines Parallelogramms also, und zwei verschiedene Seiten desselben, werden seine Winkel gefunden. Eine Formel dafür, wenn der Inhalt des Parallelogramms mit ▭, und die beiden Seiten desselben durch b und c bezeichnet worden ist = = ?

S. ▭ : bc = Sinus A.

§ 142.

Vir und funfzigster Satz.

L. Es wird gegeben ein Parallelogramm ABEC:



man sucht Formeln für die Quadrate seiner EckLinien, oder Gleichungen für $BC^2 BE^2$. Der Kürze wegen, wollen wir die Seite AB mit c, und die Seiten $AC = BE$ mit b bezeichnen.

S. $(BC)^2 = bb + cc + 2bc$ Cos. A
$(AE)^2 = bb + cc - 2bc$ Cos. A } (§ 132)

L. Nun diese Gleichungen addirt!

S. $(BC)^2 + (AE)^2 = 2\,(bb + cc)$.

L. $a^2 = bb + cc - 2bc$ Cos. A steht zwar § 132, und war dort richtig, weil es zur dortigen Zeichnung passt. Aber der ZwischenWinkel, welcher dort A hieß, heißt hier B, und also muß die Formel eigentlich seyn:

$$(AE)^2 = bb + cc - 2bc \text{ Cos. B}$$

Ist das nicht richtig?

S. Es scheint wenigstens so.

L. Aber wenn ich nun beweise, daß Cos. A = Cos. B?

Es sei $A = 126^\circ\ 52'\ 11''\ 38'''$;

wie groß ist Cosinus A?

S. Cos. A = Sin. $36^\circ\ 52'\ 11''\ 38'''$ (§ 16)
= Cos. $53^\circ\ 7'\ 48''\ 22'''$ (§ 15)
= Cosinus B (§ 141).

L. Wir wollen also Cosinus A stehn lassen, weil es hier zum Addiren bequemer ist. — Nun beide Formeln addirt!

S. $BC^2 + AE^2 = 2\,(bb + cc)$

L. In Worte übertragen : : ?

S. In jedem Parallelogramm ist die Summe der EckLinienQuadrate gleich der Summe der vier SeitenQuadrate.

L. Man kan auch die Formeln subtrahiren: $BC^2 - AE^2 = 4bc$ Cos. A. — Wir wollen doch die Probe machen, und zuerst die EkkLinie AE und BC suchen. Die Seiten des Parallelogramms sind bekant, folglich auch von jedem Dreiekke zwei Seiten. Der Winkel B ist 53° 7′ 48″ 22‴, woraus sich A = 126° 52′ 11″ 8‴ ergibt (§ 141).

S. $AE = \sqrt{(25 + 49 - 70 \text{ Cos } 126^\circ 52' 11'' 8''')}$
$= \sqrt{(74 - 70 \times 0{,}6)}$
$= \sqrt{(74 - 42)}$
$= \sqrt{32} = 5{,}6568544$
$BC = \sqrt{(74 + 70 \times 0{,}6)}$
$= \sqrt{(74 + 42)}$
$= \sqrt{116} = 10{,}77032$: :

$AE^2 + BC^2 = 32 + 116$
$= 148$

L. Und die Quadrate der Seiten!

S. $AB^2 + CE^2 = 49 + 49 = 98$
$AC^2 + BE^2 = 25 + 25 = 50$

$AB^2 + CE^2 + (AC^2 + BE)^2 = 148$
$= AE^2 + BC^2$

L. Und nun auch die Probe von $BC^2 - AE^2 = 4bc$ Cos. A.

S. $BC^2 - AE^2 = 4bc$ Cos. A
$= 116 - 32 = 4 \times 35 \times \text{C. } 126^\circ 52' 11'' 8'''$
$= 84 = 140 \times 0{,}6.$

V.

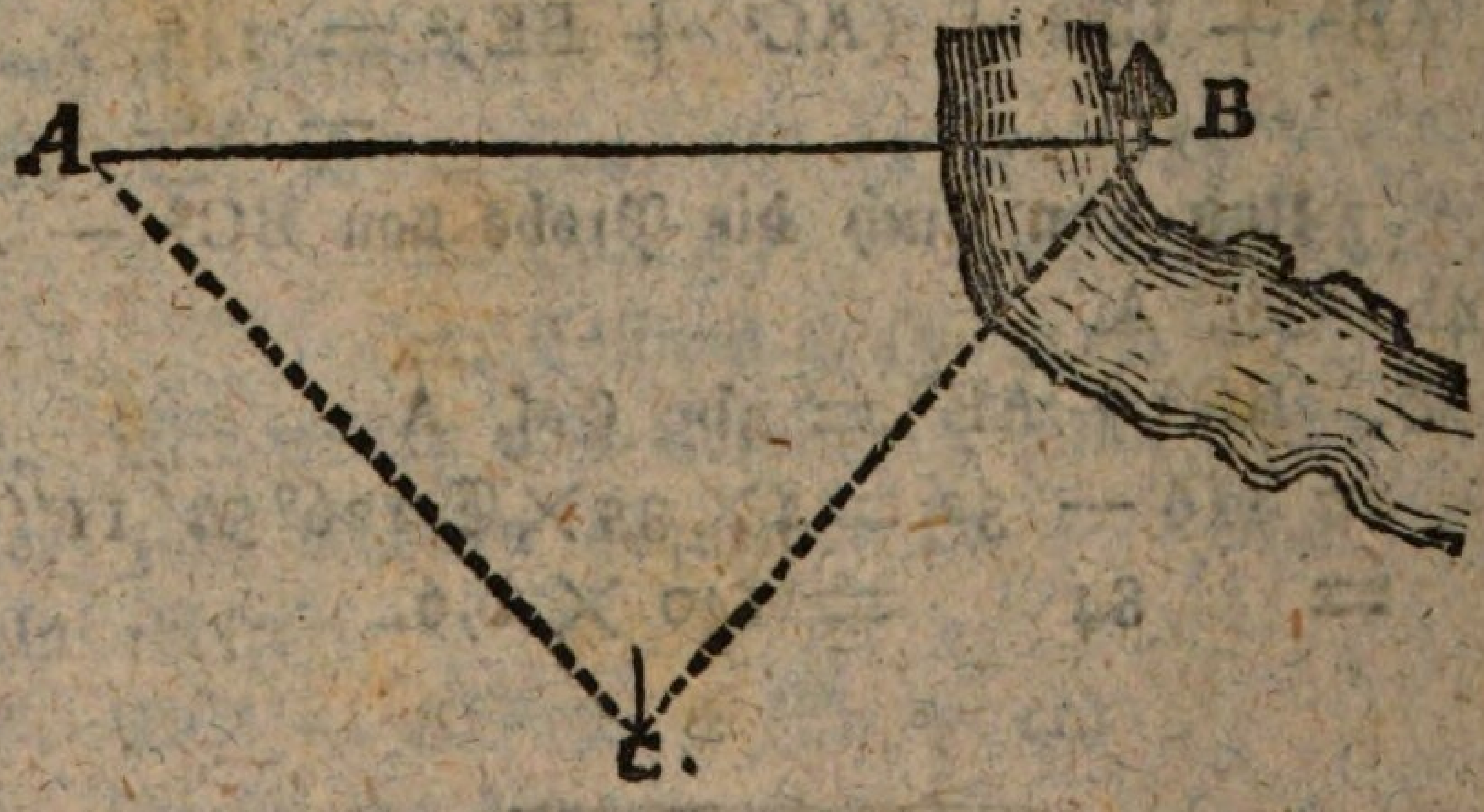
Anwendung der Trigonometrie auf das Feldmessen.

---

§ 143.

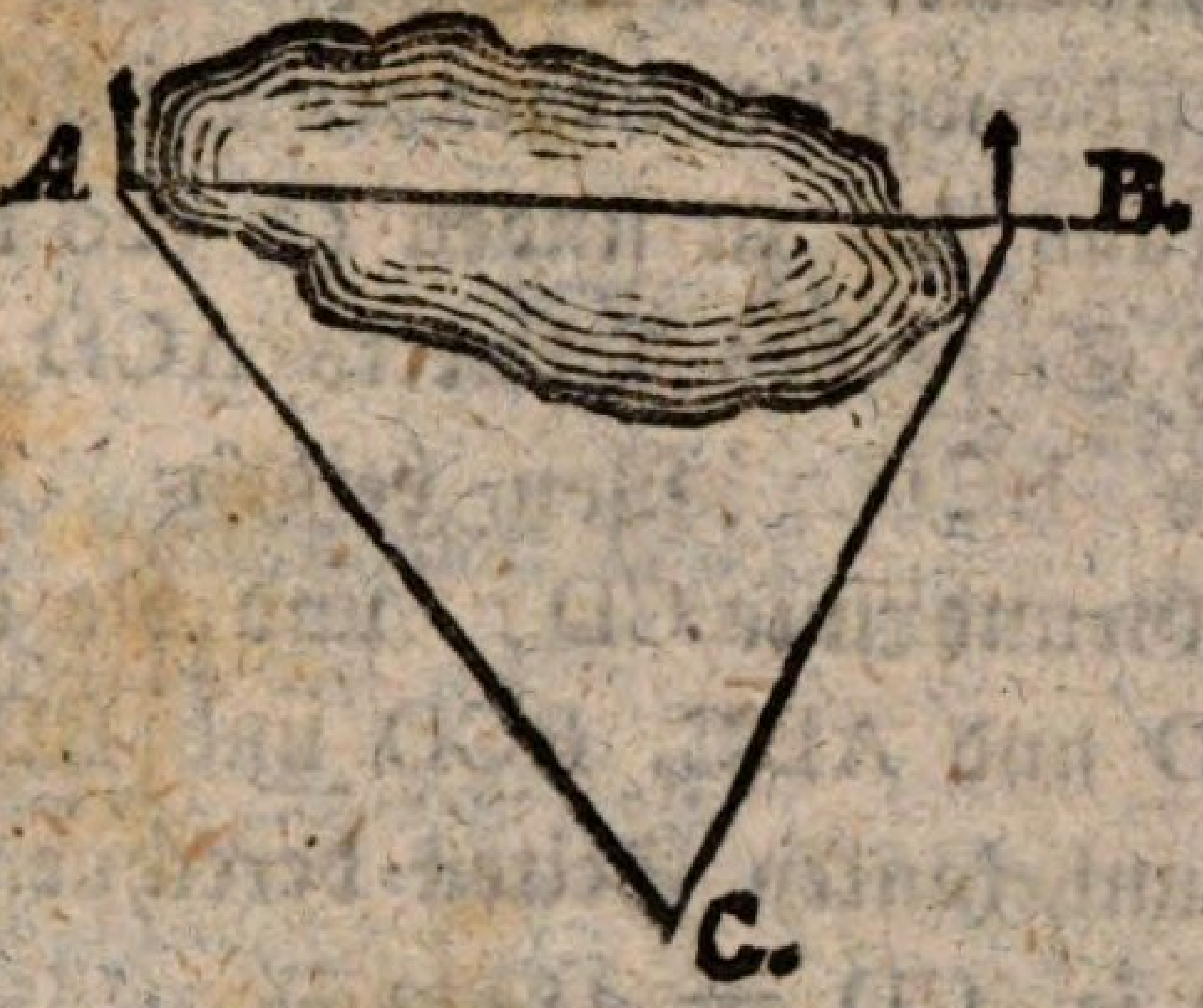
L. Was in der Geometrie durch Zeichnung und Messung gefunden wird, das lehrt die Trigonometrie durch Rechnung finden. Winkel trigonometrisch zu messen und aufzutragen, ist schon gelehrt (§ 99 bis 105): jezt wollen wir das Berechnen der Linien beim Feldmessen, an einigen Beispielen, zeigen.

§ 144.



L. Zuerst wollen wir sehn, wie die Länge einer Linie AB gefunden wird, welche nur an ihren beiden EndPunkten, A und B, zugänglich ist (G.

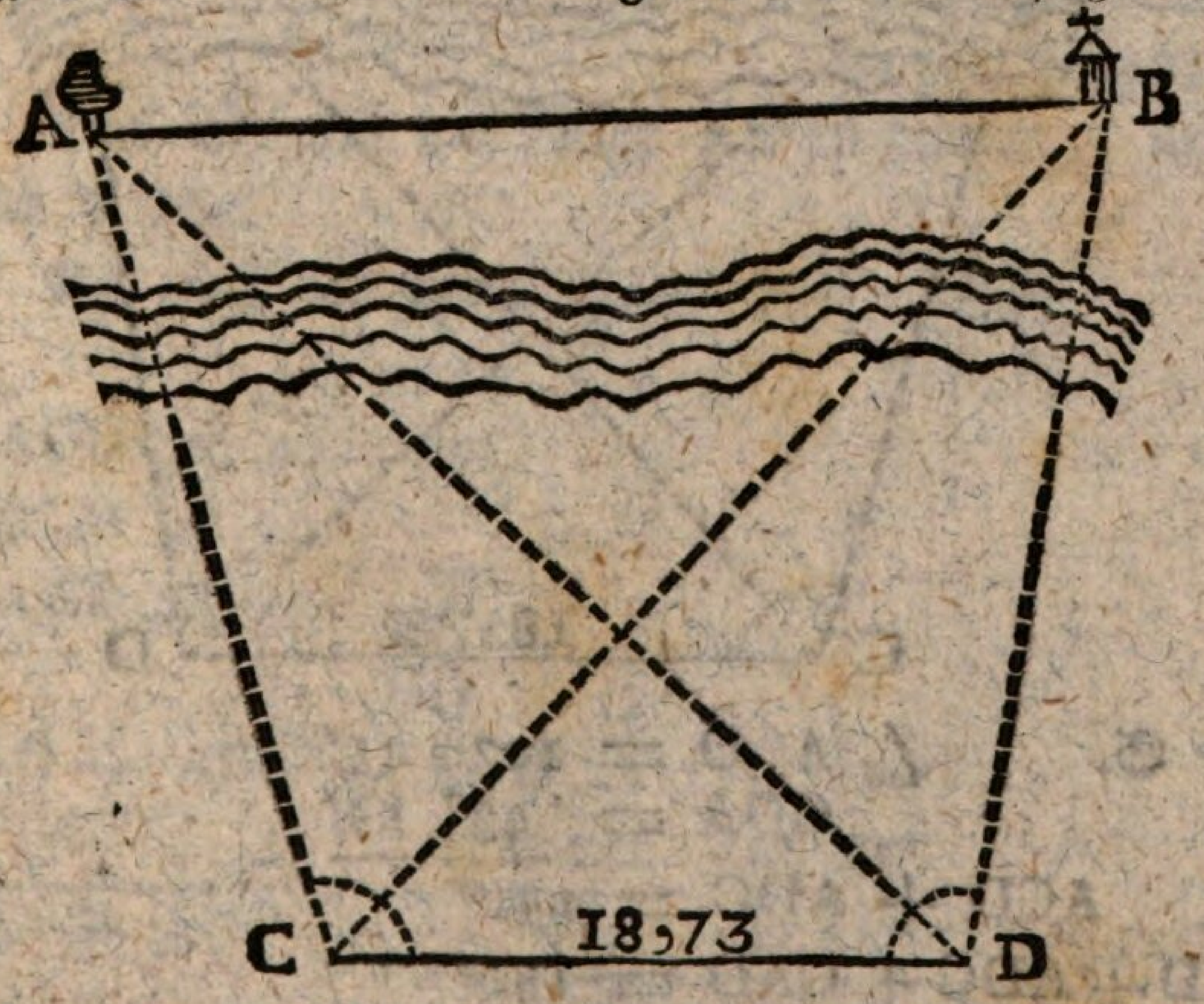
§ 287). Wie wird man hier verfahren, um dieses trigonometrisch zu bewerkstelligen?



S. Ich messe des Dreiekks ABC Seiten AC und BC, und ihren Zwischen Winkel C, und berechne hieraus, nach § 120, die Länge von AB.

L. So ist es recht! Wenn aber nur ein End-Punkt A der Linie AB zugänglich wäre (G. § 288)?

S. So messe ich die Linie AC, und die Winkel an deren EndPunkten A und C, und berechne aus diesen drei Stükken die Länge von AB nach § 110.



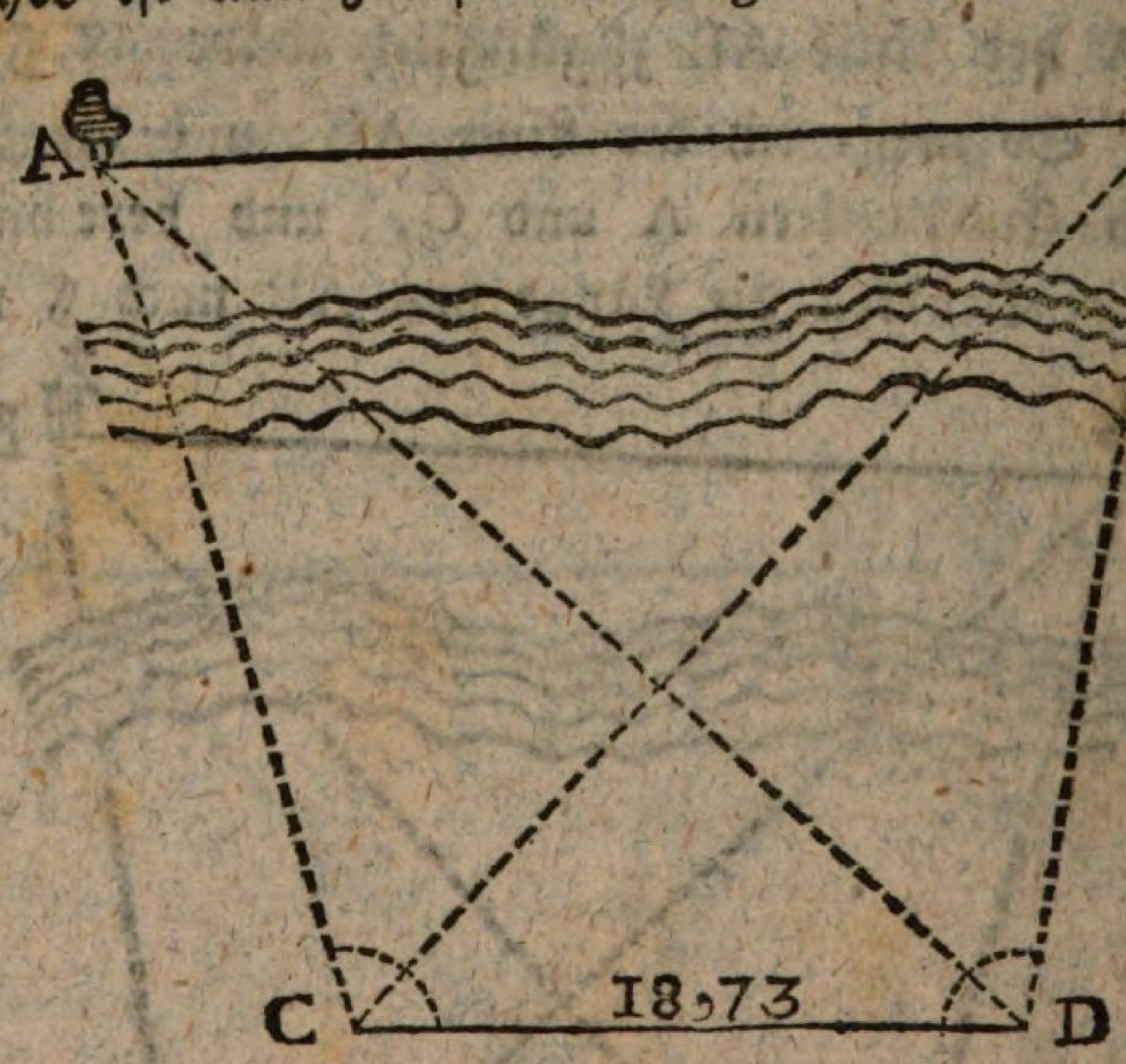
L. Es ist noch der dritte Fall übrig: die Länge

einer ganz unzugänglichen Linie AB zu berechnen (G. § 289).

S. Dazu ist nötig die Seiten AC und BC des Dreiekks ABC, und den dazwischen liegenden Winkel ACB, zu messen, um daraus AB zu finden (§ 120 oder 131): AC aber ist eine Seite des Dreiekks ACD, und BC eine des Dreiekks BCD. Von beiden Dreiekken aber kan ich die GrundLinie CD, und die daran liegenden Winkel ACD und ADC, BCD und BDC messen, und daraus die unbekanten Seiten berechnen (§ 110).

L. Es sei CD = 18,73
∠ ACD = 107° 45′
BCD = 49°
ADC = 43° 15′
BDC = 98° 33′

Welches ist nun zuerst die Länge von AC?



S. ∠ ACD = 107° 45′
CDA = 43° 15′
ACD + ADC = 151°
ACD + ADC + CAD = 180°
CAD = 29° (G. § 128).

Log.Sin. CAD = Log.Sin. 29° = 9,6855712
Log. CD = Log. 18,73 = 1,2725378
Log.Sin. CDA = Log.S. 43° 15′ = 9,8358066

11,1083444

Log. AC = 1,4127732
= Log. 25,868

L. Und die Länge von BC?

S. ∠ BCD = 49°
BDC = 98° 32′

BCD + BDC = 147° 32′
179 60

CBD = 32° 28′

Log.Sin. CBD = Log.S. 32° 28′ = 9,7298197
Log. CD = Log. 18,73 = 1,2725378
Log.Sin. BDC = Log.S. 98° 32′ = 9,9951654

11,2677032

Log. BC = 1,5378835
= Log. 34,5051

L. Nun ist noch die Länge AB zu suchen, und zwar nach § 120.

S. Da muß ich zuerst die Winkel suchen

(a)

∠ ACD = 107° 45′
BCD = 49

∠ ACB = 58° 45′

(b)

∠ BAC + ABC + ACB = 179° 60″
ACB = 58° 45′

BAC + ABC = 121° 15′ = S (§ 118)
60° 37′ 30″ = ½ S

(c)

$$BC = 34{,}505$$
$$AC = 25{,}868$$
$$BC + AC = 60{,}373$$
$$BC - AC = 8{,}637$$

(d)

$$\text{Log. } BC + AC = \text{Log. } 60{,}373 = 1{,}7808428$$
$$\text{Log. } BC - AC = \text{Log. } 8{,}637 = 0{,}9363629$$
$$\text{Log. Tg. } \tfrac{1}{2} S = \text{L. T. } 60^\circ 37' 30'' = 10{,}2494976$$
$$11{,}1858605$$
$$\text{Log. Tang. } \tfrac{1}{2} D = 9{,}4050177$$
$$= \text{Tg. } 14^\circ 15' = \tfrac{1}{2} D$$

(§ 118)

(e)

$$\tfrac{1}{2} S = 60^\circ\ 37'\ 30''$$
$$\tfrac{1}{2} D = 14^\circ\ 15'$$
$$\tfrac{1}{2} S + \tfrac{1}{2} D = 74^\circ\ 52'\ 30'' = \angle\ BAC$$
$$\tfrac{1}{2} S - \tfrac{1}{2} D = 46^\circ\ 22'\ 30'' = \angle\ ABC$$

(f)

$$\text{Log S. } BAC = \text{Log. S. } 74^\circ 52' 30'' = 9{,}9846887$$
$$\text{Log. } BC = \text{Log. } 34{,}5051 = 1{,}5378835$$
$$\text{Log. S. } ACB = \text{Log. S. } 58^\circ 45' = 9{,}9319213$$
$$11{,}4698048$$
$$\text{Log. } AB = 1{,}4851161$$
$$= \text{Log. } 30{,}557.$$

L. Der Uebung wegen wollen wir die lezte Rechnung auch nach § 131 anstellen. Es ist, wie vorhin:

$$\angle\ ACB = 58^\circ\ 45'$$
$$BC = 34{,}5051$$
$$AC = 25{,}868$$

Wie lang ist AB? — Die Formel für diese Rechnung ist

$$a = \sqrt{(bb + cc - 2bc\ \text{Cos. A})}$$

wie wird diese Formel nach obenstehender Zeichnung umgeändert?

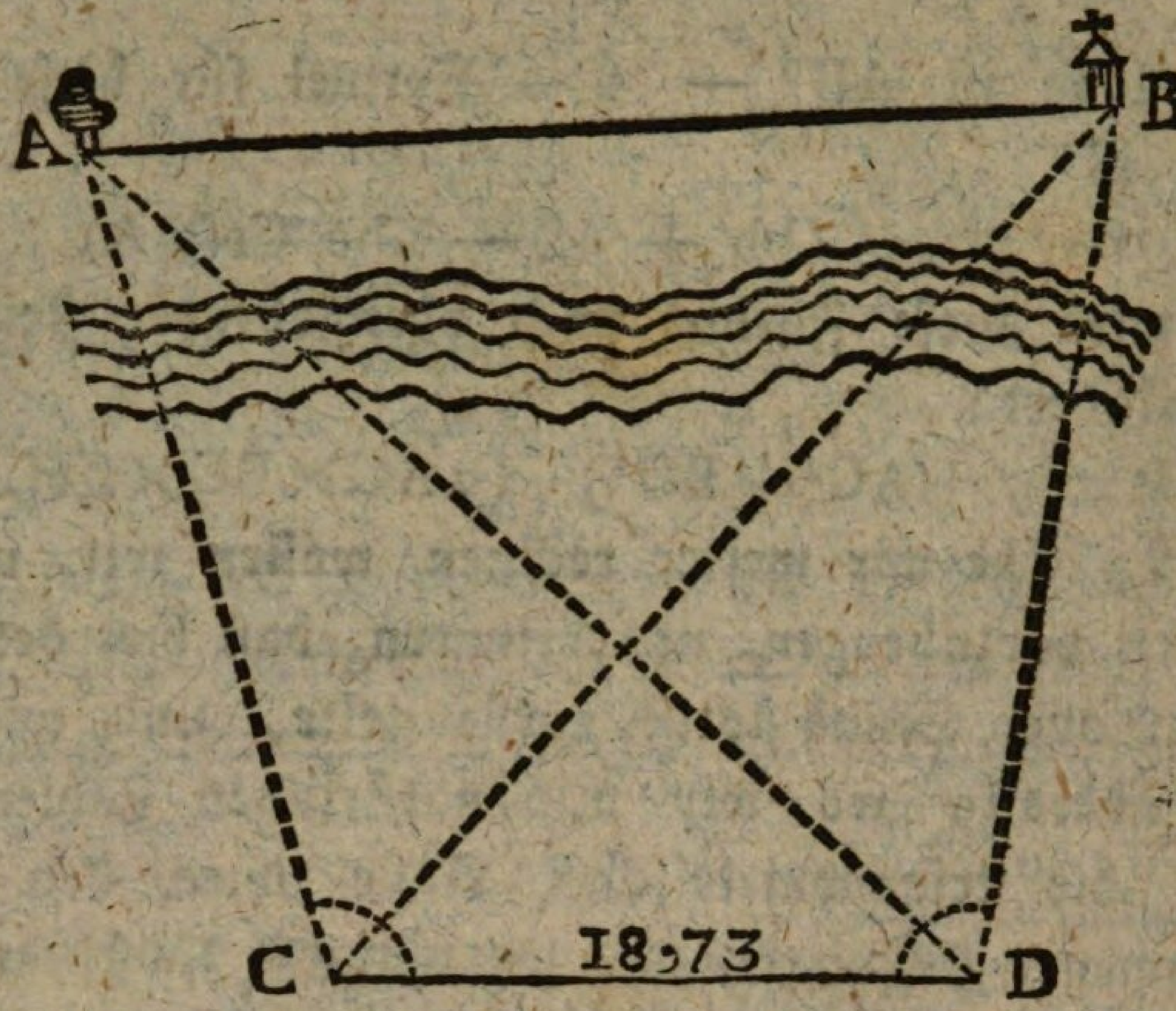
S. $AB = \sqrt{[(AC^2 + BC^2) - (2\,AC \times BC \times \text{Cos.}\,ACB)]}$

L. Ehe wir weiter rechnen, wollen wir, um Irrungen vorzubeugen, uns erinnern, daß hier der Halbmesser oder Sinus totus nur 1 gelte, und wie folglich überall, wo wir mit natürlichen Zahlen rechnen, die trigonometrischen Linien durch den Tafel-Halbmesser dividiren; und wo wir mit künstlichen Zahlen rechnen, den Logarithmen der trigonometrischen Linien 10 abziehn mussten (§ 95). — Nun weiter, und zwar, der vielziffrigen Zahlen wegen, mit Logarithmen.

S. Log. AC = Log. 25,868 = 1,4127629
Log. AC^2 = Log. $(25,868^2)$ = 2,8255258
AC^2 = 669,153
Log. BC = Log. 34,5051 = 1,5378835
Log. BC^2 = L. $(34,5051^2)$ = 3,0757670
BC^2 = 1190,603
Log. 2 AC = Log. 51,736 = 1,7137928
Log. BC = Log. 34,5051 = 1,5378835
Log. Cos. ACB = L. Cos. 58° 45′ = 9,7149776 — 10
L. 2 AC + L. BC + Log. Cos. ACB = 2,9666539
2 AC × BC × Cos. ACB = 926,091
AC^2 + BC = 1859,756
$(AC^2 + BC^2) - (2\,AC \times BC \times$ C. ACB = 933,665
$\sqrt{[(AC^2 + BC^2) - (2AC \times BC \times \text{C.}\,ACB)]} = 30,5559$ =

§ 145.

L. Nun ist die Frage: Wie wird die Zeichnung aufgetragen?



S. Ich trage nach dem verjüngten MaßStabe die StandLinie CD aufs Papier, und lege an ihrem EndPunkte C die Winkel DCA und DCB (§ 102), und an dem andern D, die Winkel CDA und CDB; so geben die Durchschnitte der Schenkel dieser Winkel die Punkte A und B, wie in der Geometrie § 289.

L. Das ist richtig: aber besser und kürzer ist es, wenn man in den Dreiekken ACD und BCD nicht nur die Seiten AC und BC, sondern auch AD und BD berechnet, und dan die Dreiekke aufträgt (G. § 90). — Die Seiten AC und BC kennen wir schon. Es ist nämlich

AC = 25,868
BC = 34,5051 } (§ 144)

Wir haben also noch AD und BD zu berechnen.

S. Log. Sin. CAD = Log. S. 29° = 9,6855712
Log CD = 18,73 = 1,2725378
Log. Sin. ACD × Log. Sin. 107° 45′ = 9 9788175

11,2513553

Log. AD = 1,5657841
= Log. 36,7946

L. Nun ist noch BD zu berechnen übrig.

S. Log. Sin. (CBD = 32° 28′) = 9,7298197
Log. (CD = 18,73) = 1,2725378
Log. Sin. (BCD = 49°) = 9,8777799

11,1503177

Log. Sin. BD = 1,4204980
= Log. 26,3329.

L. Und hiermit mag es genug seyn. Wer zwei Oerter aufzutragen, und ihre Entfernung von einander zu berechnen weis, der weis auch drei, vier ꝛc. Oerter aufzutragen, und überhaupt alle in der praktischen Geometrie vorkommenden Fälle trigonometrisch zu behandeln.

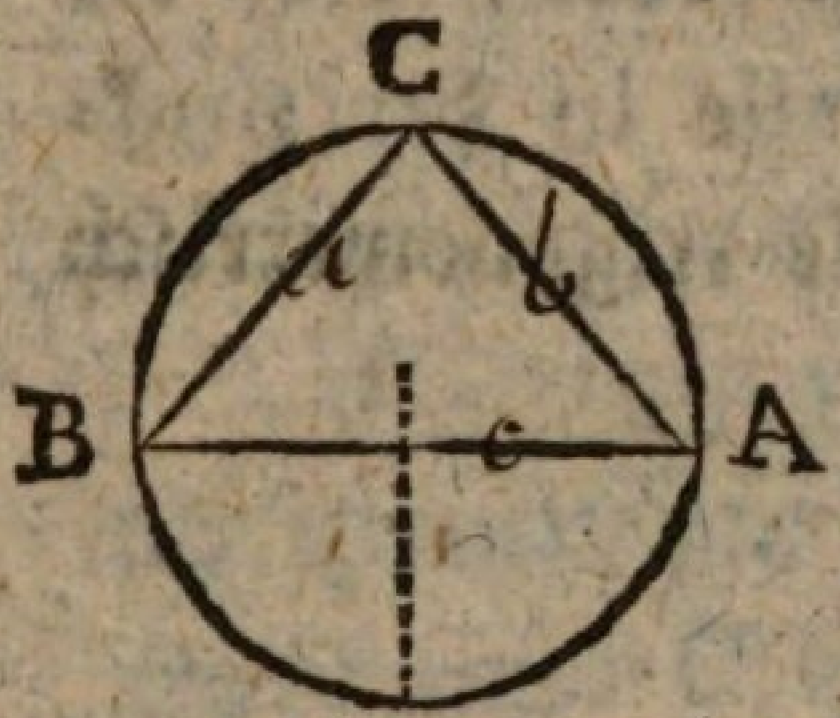
VI.

Trigonometrische KreisRechnung.

---

§ 146.

Fünf und funfzigster Satz.



L. Hier ist ein Dreiekk ABC: welches ist der Sinus des Winkels A, für den Halbmbesser r des um das Dreiekk beschriebenen Kreises?

S. Sin. A $= \frac{1}{2}$ BC (§ 106) $=$ a : 2 (§ 123).

L. Nimt man r $=$ 1 an, so ist

r Sin. A $=$ 1a : 2 $=$ a : 2

r $=$ (a : 2) : Sin. A (A. § 151)

$=$ a : 2 Sin. A (A. § 111. 119)

$=$ a : (2 u : 2bc) (§ 139)

$=$ a : (u : bc)

$=$ abc : u (A. § 112)

$r = abc : \sqrt{[(a+b+c)(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)]}$ (§ 189).

Dieses als Aufgabe eingekleidet = = ?

S. Aus den drei Seiten eines Dreiekks den Halbmesser des um dasselbe beschriebenen Kreises zu finden.

L. Dieses ist die trigonometrische Auflösung von Geom. § 185.

Es sei $a = \sqrt{32} = 5,6568544$
$b = 5$
$c = 7.$

S. $r = abc : u$
$= (\sqrt{32} \times 5 \times 7) : 56$ (§ 139)
$= (5,6568544 \times 35) : 56$
$= 197,9899040 : 56$
$= 3,535534.$

§ 147.

L. Angenommen es sei $a = b$, und das Dreiekk ABC gleichschenklig: welches ist nun die Formel für den Halbmesser r?

S. $a = b$

$r = aac : \sqrt{[(2a + c)(2a - c) cc]}$
$= aac : c \sqrt{[(2a + c)(2a - c)]}$
$= aa : \sqrt{[(2a + c)(2a - c)]}$
$= aa : \sqrt{(4aa - cc)}.$

L. Es sei $a = b = c =$, folglich das Dreiekk gleichseitig.

S. Dan ist $r = a^3 : \sqrt{3a^4}$
$= a^3 : a^2 \sqrt{3}$
$= a : \sqrt{3}.$

L. Es sei für das gleichschenklige Dreiekk
$a = b = 5,$
$c = 7;$
wie groß ist r?

S. $r = aa : \sqrt{(4aa - cc)}$
$= 25 : \sqrt{(100 - 49)}$
$= 25 : \sqrt{51}$
$= 25 : 7,141428 \ldots$
$= 3,5000700 \ldots$

L. Für das gleichseitige Dreiekk sei:

$$a = b = c = 5.$$

S. $r = a^3 : \sqrt{3a^4}$

$$= 125 : \sqrt{1875}$$

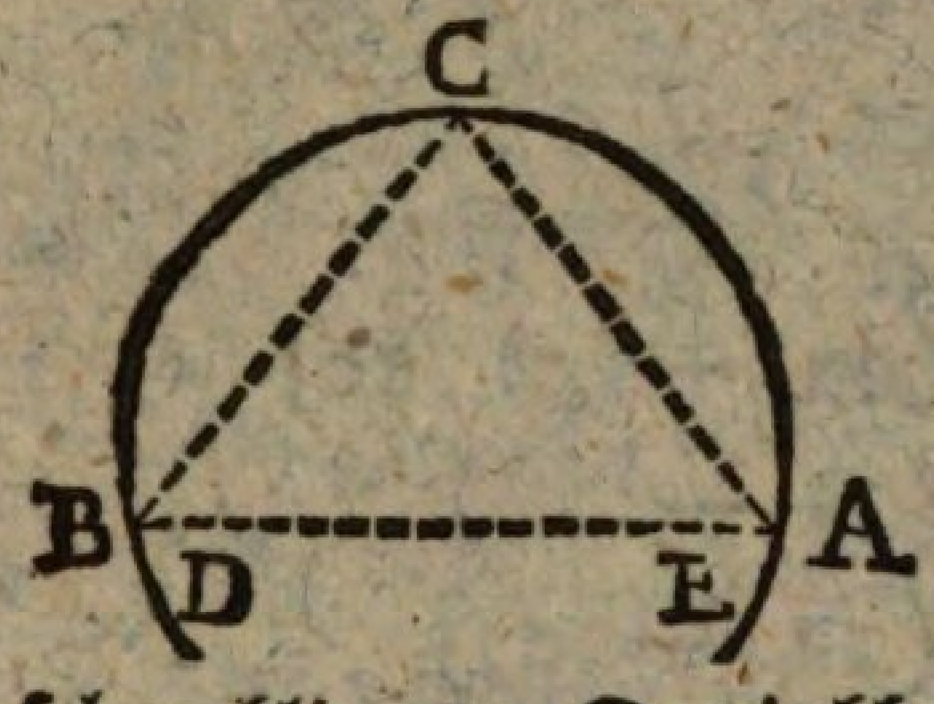
$$= 125 : 43{,}266603 \ldots$$

$$= 2{,}889064 \ldots$$

§. 148.

Sechs und funfzigster Saz.

L. Es wird gegeben ein KreisBogen DCE; man soll dessen Halbmesser berechnen.



S. Ich bemerke von C in gleicher Entfernung, auf dem Umfange, die Punkte A und B, und ziehe die Linien AB, AC, BC; so habe ich einen um ein gleichschenkliges Dreiekk ABC beschriebenen KreisBogen, dessen Halbmesser

$$r = aa : \sqrt{(4aa - cc)} \text{ (§ 147).}$$

L. Die gleiche Länge von AC und BC ist übrigens nicht notwendig, erleichtert aber die Rechnung. — Nun fehlen mir aber noch die beiden Seiten a und c; wie erfahre ich deren Länge?

S. Ich muß sie messen (G. § 273. 274)

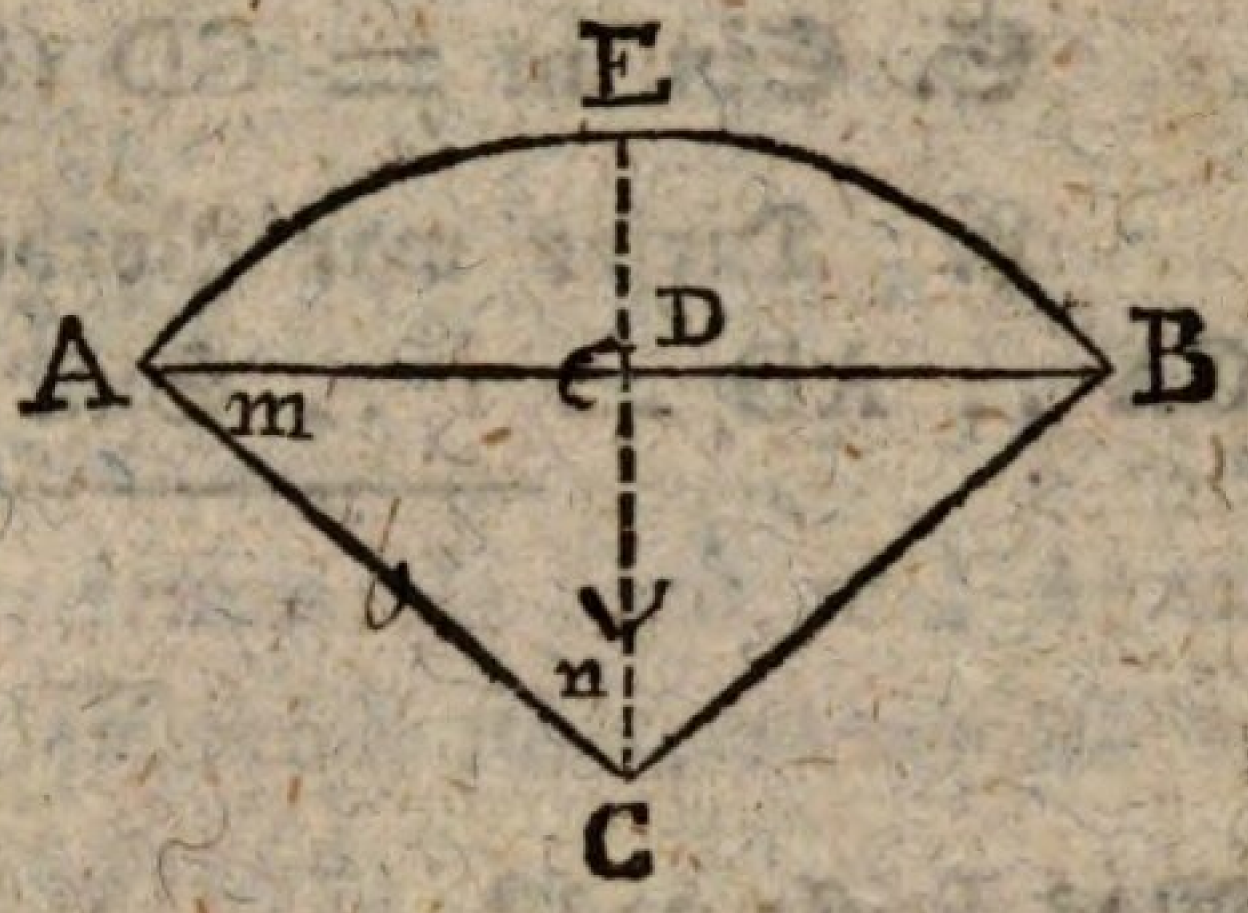
L. Da die Länge der Seiten willkührlich ist; so kan man, um Brüche zu vermeiden, CA und CB auch nach dem MaßStabe auftragen.

§ 149.

Sieben und funfzigster Saz.

L. Zwischen den Schenkeln eines gegebenen Win-

kels C wird, mit beliebigem Halbmesser CA, ein Bogen AB gezogen; und der Winkel C, so wie der Bogen AB werden gehalbt durch die Linie CDE (G. § 208). Der Kürze wegen sei:



∠ ACB = v

∠ ACD = n

∠ CAD = m

Sehne ADB = c

Halbmesser CA = b

senkrechte Linie CD = p

Der Halbmesser oder Sinus totus CA = b, dessen Wert willkührlich und veränderlich ist (§ 84) soll uns 1 gelten. — Wie groß ist nun AD?

S. $AD = BD = \frac{c}{2}$ (G. § 208) $= 1 - pp$ (G. § 160).

L. Und die Winkel bei D?

S. Sind rechte Winkel (G. § 208).

L. Und wie groß sind die Winkel m und n zusammen?

S. ∠ ADC = ∟

folglich ∠ m + ∠ n = ∟ (G. § 118).

L. Also m und n sind einer des andern Ergänzung (§ 16). — Welche Bedeutung hat nun AD $\frac{1}{2}$c in Hinsicht auf den Winkel n?

S. AD = $\frac{1}{2}$c = Sinus n (§ 159).

L. Und welches ist der Cosinus des Winkels n?

S. Cosinus n = CD (§ 15).

L. Für welchen Halbmesser?

S. Für den Halbmesser CA (§ 106).

L. Und der Sinus des Winkels m?

S. Sin. m = CD (§ 1. 59) = Cos. n (§ 16).

L. Dieses war Vorbereitung. Nun zur Sache!
CA .. AD = 1 .. Sin. n = b .. $\frac{c}{2}$

$$\frac{c}{2} = b \text{ Sin. } n \text{ (A. § 294)}$$

$$c = 2b \text{ S. } n = 2b \text{ S. } \tfrac{1}{2}v$$

Was heisst das?

S. Die Sehne eines Bogens ist das Product des Halbmessers und des Sinus der Hälfte des Bogens, oder ihm entsprechenden Winkels.

L. Nun müssen wir auch sehen wie der Halbmesser gefunden wird.

S. Wir müssen b zu isoliren, das heisst, ganz allein auf eine Seite des GleichheitsZeichens zu bringen suchen:

$$b \text{ Sin. } n = \frac{c}{2}$$

$$b = \frac{c}{2} : \text{Sin. } n$$
$$= c : 2 \text{ Sin. } n.$$

Das heisst: Die Sehne dividirt durch den doppelten Sinus des halben Bogens, gibt den Halbmesser.

L. Die Formel leidet noch Veränderungen.

$$b = \frac{c}{2 \text{ Sin. } n}$$

$$= \frac{c}{2} \times \frac{1}{\text{Sin. } n}$$

$$= \frac{c}{2} \times \text{Cosec. } n \text{ (§ 51)}$$

Es sei b = 1, v = 105°;
folglich n = $\frac{v}{2}$ = 52° 30′:
welches ist c?

S. $c = 2b$ Sin. n
$= 2$ Sin. $52^\circ\ 30'$
$= 2 \times 0{,}7933533$
$= 1{,}5867066$

L. Kenne ich c, so kenne ich auch c : 2 = Sinus n; und weis ich n, so weis ich auch 2n = v.

Es sei $c = 1{,}5867066$,
$v = 105^\circ$:

welches ist b?

S. $b = c$: 2 Sin. n
$= 1{,}5867066 : 1{,}5867066$
$= 1$.

L. Wenn also zwischen diesen dreien, Halbmesser, Sehne, Winkel, zweie bekant sind, so wird aus ihnen das dritte gefunden. Man nennt dieses: Halbmesser, Sehne und MittelPunktsWinkel eines Kreises mit einander vergleichen.

§ 150.

L. Bei Anwendung dieser Formeln muß man nie vergessen, daß sie für den Halbmesser = 1 berechnet sind, und folglich auch die darin vorkommenden Sinus n und Cosinus n dem entsprechen müssen (§ 83). Wäre dieses nicht, und man nähme dafür den TafelSinus = r, wie würde dan die Formel für c seyn?

S. Dan wäre c = (2b Sin. n) : r (A. § 294).

§ 151.

Acht und funfzigster Satz.

L. Es sei wie vorhin

$AC = b = 1,$

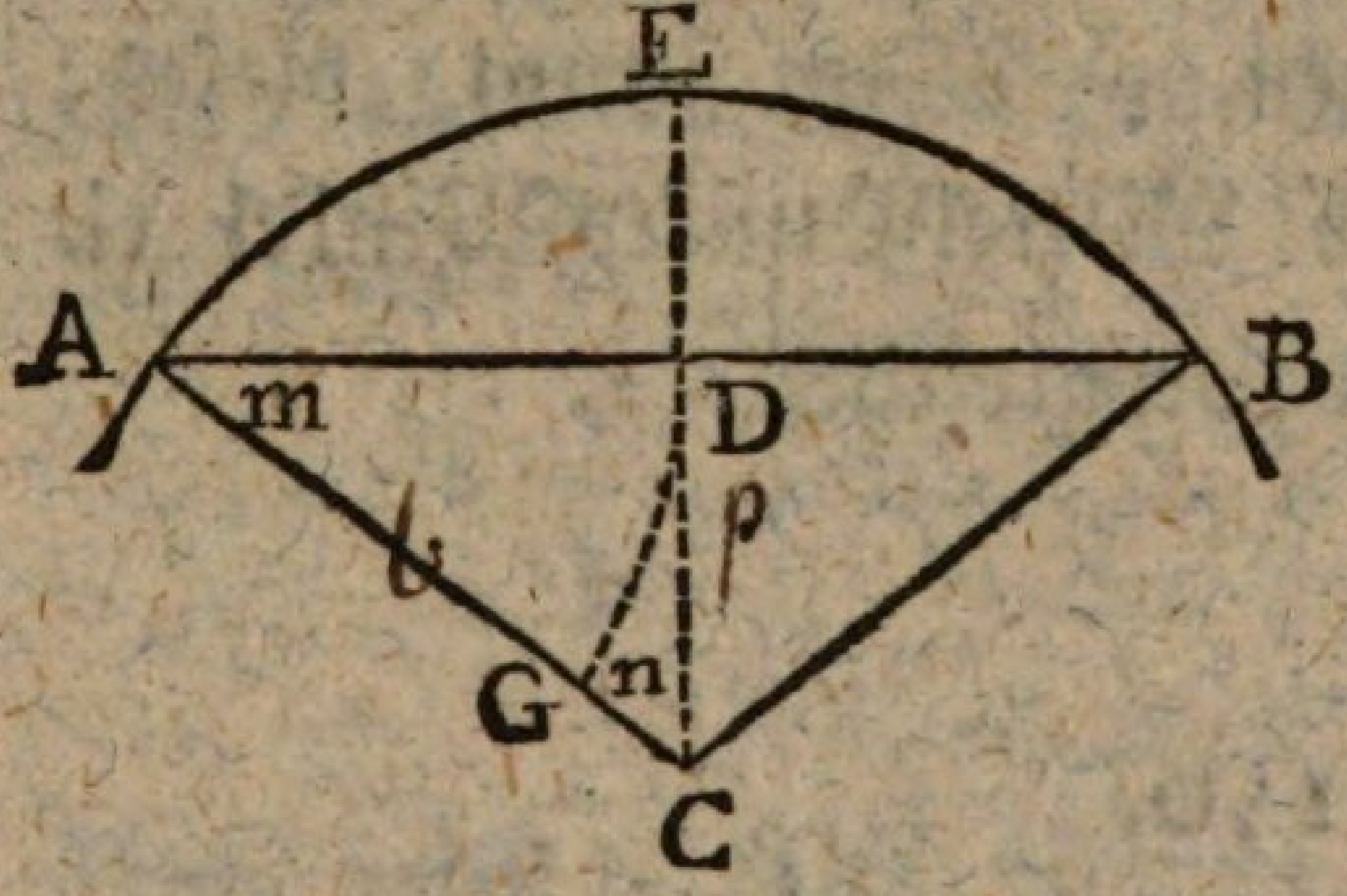
so ist $CD = p =$ Sin. m $=$ Cos. n (§ 149)

1 .. Cos. n $=$ b .. p

p $=$ b Cos. n (A. § 294)

Das heißt : : ?

S. Die senkrechte Linie p ist das Product des Halbmessers und des Cosinus der Hälfte des Bogens AEB.



L. Wenn man mit AD als Halbmesser den Bogen DG zieht, was ist dan DC in Hinsicht auf den Bogen DG und den Winkel m?

S. DC ist Tangente des Bogens DC (§ 29) und des Winkels m (§ 59) für den Halbmesser AD (§ 108).

L. Und in Hinsicht auf den Winkel n?

S. DC ist Cotangente des Winkels n (§ 43) für den Halbmesser AD.

L. Setzen wir nun

$AD = \frac{c}{2} = 1,$

so ist

1 .. Cotang. n $= \frac{c}{2}$ .. p

p $= \frac{c}{2}$ Cotang. n

Da haben wir noch eine Formel für p: Wie wird die zu übersetzen seyn?

S. Die halbe Sehne multiplicirt durch die Cotangente des halben Bogens, gibt die senkrechte Linie p.

L. Es sei $b = 1$
$n = \frac{v}{2} = 52^\circ\ 30'$
$c = 1{,}5867066.$

Wie groß ist p, nach der ersten Formel?

S. $p = b$ Cos. n
$= 1$ Cos. $52^\circ\ 30'$
$=$ Sin. $37^\circ\ 30'$
$= 0{,}6087614.$

L. Und nach der zweiten Formel?

S. $p = \frac{c}{2}$ Cotang. n
$= 1{,}5867066 : 2 \times$ Cot. $52^\circ\ 30'$
$= 0{,}7933533 \quad \times 0{,}7673270.$

L. Da die Factoren viele Ziffern haben, so würde die Multiplication beschwerlich seyn. Wir wollen uns daher der Logarithmen bedienen.

S. Log. $0{,}7933533 = 0{,}8994666 - 1$ (A. § 356)
$+$ Log. Tg. $37^\circ\ 30' = 9{,}8849805 - 10$ (§ 127)
$= 10{,}7844471 - 11$
$= 0{,}7844471 - 1$
$=$ Log. $0{,}608761$: :

§ 152.

L. Gesetzt $AB = c$ wäre die Seite eines ordentlichen NeunEkks, wie groß wäre dan $CD = p$?

S. Ich muß erst den MittelPunktsWinkel ACB $= v$ wissen. Im ordentlichen NeunEkk ist
$v = 360^\circ : 9 = 40^\circ$ (G. § 244)

$p = b$ Cos. 20°
$= b \times 0{,}9396926$

L. Und so lässt sich, wenn ich CA = b = CE desgleichen CD = p kenne, DE finden. Wie groß ist DE, wenn CD = 1 ist?

S. DE = b — p
= 1 — 0,9396926
= 0,0603073.

L. Nun lässt sich auch wol AD = $\frac{1}{2}$c, die halbe Seite des NeunEkks finden?

S. O ja. Sin. ADC .. AC = Sin. n .. AD (§ 110)
= Sin. 90° .. 1 = S. 20° .. $\frac{c}{2}$
= 10000000 .. 1 = 3420202 .. $\frac{c}{2}$

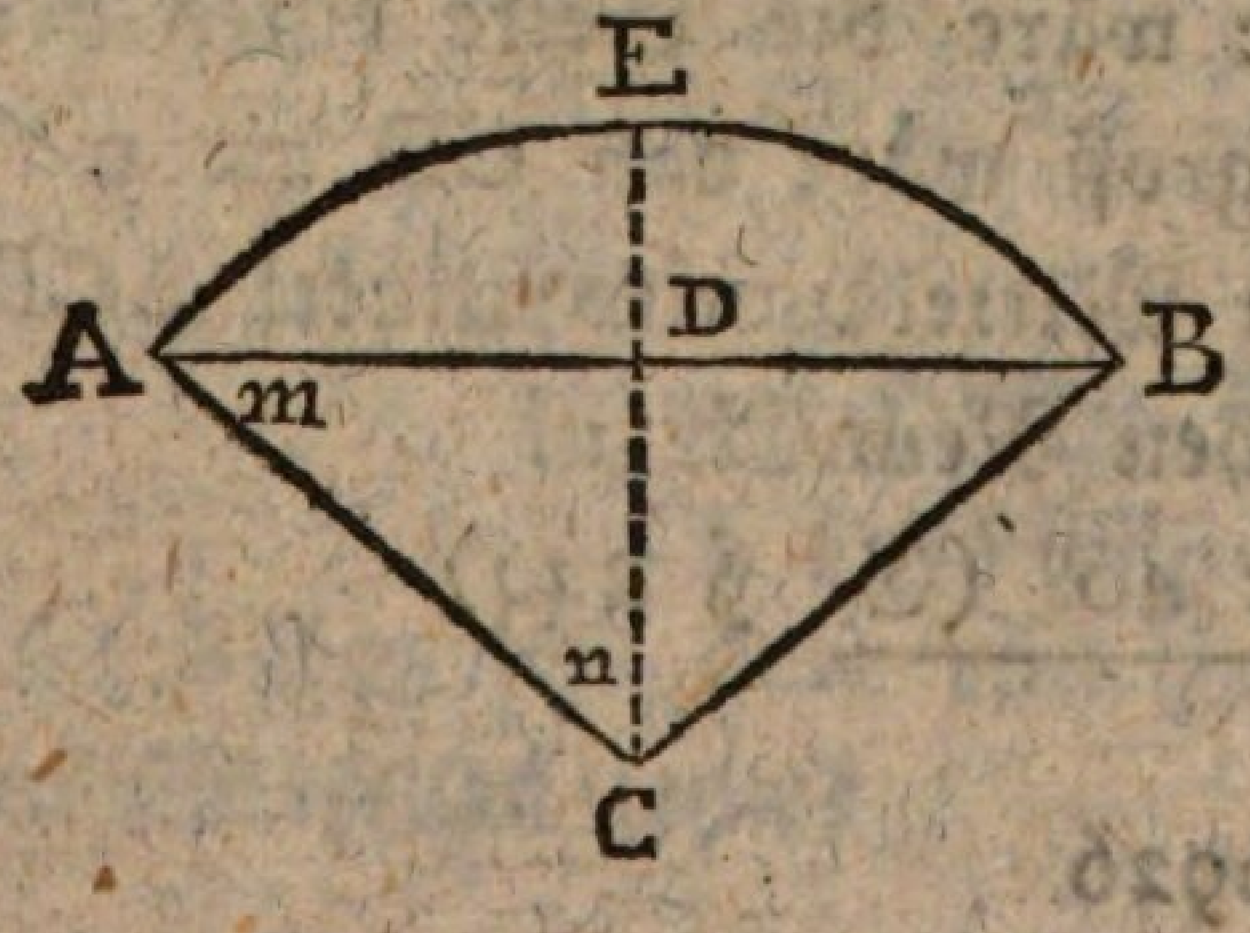
$\frac{c}{2}$ = 3420202 : 10000000
= 0,3420202

c = 0,6840404.

L. Nun kennen wir AB, und AC = BC. Und da ein ordentliches VielEkk aus so viel gleichähnlichen Dreiekken besteht als es Seiten hat (G. § 240); so lässt sich das verlangte NeunEkk verfertigen (G. § 90). Und so lässt sich jede verlangte ordentliche VielEkks Seite berechnen, und das VielEkk selbst zeichnen.

§ 153.

Neun und funfzigster Satz.



L. Was für ein Dreiekk ist ABC?

S. Ein gleichschenkliges (G. § 57), dem CA = BC (G. § 21).

L. Folglich auch m = B (G. § 57) —

Wie ist nun das Verhältniß von c zu b?

S. c .. b = Sin. v .. Sin. B (§ 107)
= Sin. v .. Sin. m (G. § 27)
= Sin. v .. Cos. n (§ 16)

L. Wir müssen das dritte Glied (Sin. v) in die vierte Stelle schaffen.

S. b .. c = Cos. n .. Sin. v (A. § 286)

Sin. v = c Cos. n : b.

L. Gilt nun b = 1, so ist Sin. v = = ?

S. Sin. v = c Cos. n.

L. Aber Sin. n = $\frac{1}{2}$c

2 Sin. n = c

Sin. v = 2 Sin. n × Cos. n.

Was bedeutet das?

S. Der Sinus eines Bogens AEB, oder der Winkel v wird gefunden, wenn man den doppelten Sinus seiner Hälfte, durch den Cosinus derselben multiplicirt.

L. Aufgabe und Auflösung sind wie § 68, nur daß wir zur lezten auf andrem Wege gelangt sind als dort.

Es sei n = 52° 30′:
welches ist Sinus 2n = Sinus v = Sinus 105°?

S. Sin. v = 2 Sin. n × Cos. n
= 2 Sin. 52° 30′ × Cos. 52° 30′
= 2 Sin. 52° 30′ × Sin. 37° 30′
= 2 × 0,7933533 × 0,6087614
= 0,9659257
= Sin. 75° = Sin. 105° (§ 11).

L. Zur Uebung wollen wir die Rechnung nach Logarithmen von Sinus v suchen.

S. Sin. 105° = 2 × Sin. 52° 20′ × Sin. 37° 30′

Log. Sin. 105° = L. 2 + L. S. 52° 30′ + L. S. 37° 30′

Log. 2 = 0,3010300

\+ Log. Sin. 50° 30′ = 9,8994667 — 10

\+ Log. Sin. 37° 30′ = 9,7844471 — 10

= 19,9849438 — 20

= 0,9849438 — 1.

L. Für welchen Halbmesser ist dis der Logarithme?

S. Für den Halbmesser 1.

L. Was muß man nun tuhn, um diesen in den TafelLogarithmen zu verwandeln?

S. Man muß 10 addiren (§ 95).

0,9849438 — 1 + 10

= 9,9849438

= TafelLog. Sin. 75°

= TafelLog. Sin. 105°.

§ 154.

Sechzigster Satz.

L. Es wird gegeben der Halbmesser eines Kreises, man soll von dem Umfange einen Bogen v abschneiden.

S. Ich muß die Sehne c suchen (G. § 206)

$c = 2r \text{ Sin. } \frac{v}{2}$ (§ 149).

L. Es sei v = 105°, und r = 1000 : : ?

S. So ist c = 2r × Sin. 52° 30′

= 2r × 0,7953533

= 1586,7066.

L. Da 60° + 45° = 105°, und die Sehne von 60 Grad dem Halbmesser gleich ist; so hätten wir, um einen Bogen von 105° Grad zu erhalten, nur die Sehne von

45 Grad trigonometrisch zu suchen nötig gehabt. Die Rechnung wird zwar hierdurch nicht abgekürzt, aber für die Ausübung, z. B. bei Verfertigung grosser astronomischer Quadranten, kan dieses Verfahren nützlich seyn. Welches ist die Sehne 45 Grad für den Halbmesser 1000?

S. $c = 2r$ Sin. n
$= 2000 \times$ Sin. $22^\circ\ 30'$
$= 2000 \times 0{,}3826824$
$= 764{,}3648$.

§ 155.

L. Eine Anwendung hiervon ist, die Seite eines ordentlichen VielEkks zu finden. Wir wollen zur Probe, die Seite des NeunEkks suchen. Welches ist dessen MittelPunkt-Winkel ACB = v?

S. Der MittelPunkts-Winkel des ordentlichen NeunEkks ist $360^\circ : 9 = 40^\circ$ (G. § 244).

L. Und welches ist dessen Seite AB = c?

S. $c = 2r$ Sin. $\frac{v}{2}$ (§ 150)
$= 2r$ Sin. 20°

Oder, wenn $r = 1$ angenommen wird,
$c = 2$ Sin. 20°
$= 2 \times 0{,}3420202$
$= 0{,}6840404$

L. Gesetzt aber es wäre $r = 3$?

S. So ist $c = 0{,}6840404 \times 3$ (§ 58)
$= 2{,}0521212$.

L. Und für $r = 10$ = = ?

S. Ist $c = 0{,}6840404 \times 10$
$= 6{,}840404$.

L. So läßt sich in einen gegebenen Kreis ein verlangtes VielEkk zeichnen. Wie verfährt man?

S. Man nimt den Halbmesser für 1 an, berechnet die Seite des Vielekks in DecimalTeilen des Halbmessers, und trägt sie auf der KreisLinie herum.

§ 156.

Ein und sechzigster Satz.

L. $b = \frac{c}{2} \times \text{Cosec.}\, \frac{v}{2}$ (§ 149).

Nun sei $c = 15{,}867066$,

$n = 52^\circ\ 30'$

wie groß ist b?

S. $b = (15{,}867066 : 2) \times \text{Cosec.}\ 52^\circ\ 30$,

$= 7{,}933533 \times 1{,}2604724$

$= 9{,}999999 \ldots = 10.$

L. Also aus der Sehne eines Bogens v wird der Halbmesser gefunden, und zwar mittels der Formel

$$b = \frac{c}{2}\ \text{Cosec.}\ \frac{v}{2}$$

So läßt sich, wenn die Seite eines verlangten VielEkks gegeben ist, der Halbmesser des ihr entsprechenden Kreises finden. Es sei, für die Seite des NeunEkks,

$c = 2{,}0521212$:

wie groß ist der dazu passende Halbmesser b?

S. $b = (c : 2) \times \text{Cosec.}\ (v : 2)$

$= (2{,}0521212 : 2) \times \text{Cosec.}\ (40^\circ : 2)$

$= 1{,}0260606 \times \text{Cosec.}\ 20^\circ$

$= 1{,}0260606 \times 2{,}9238044.$

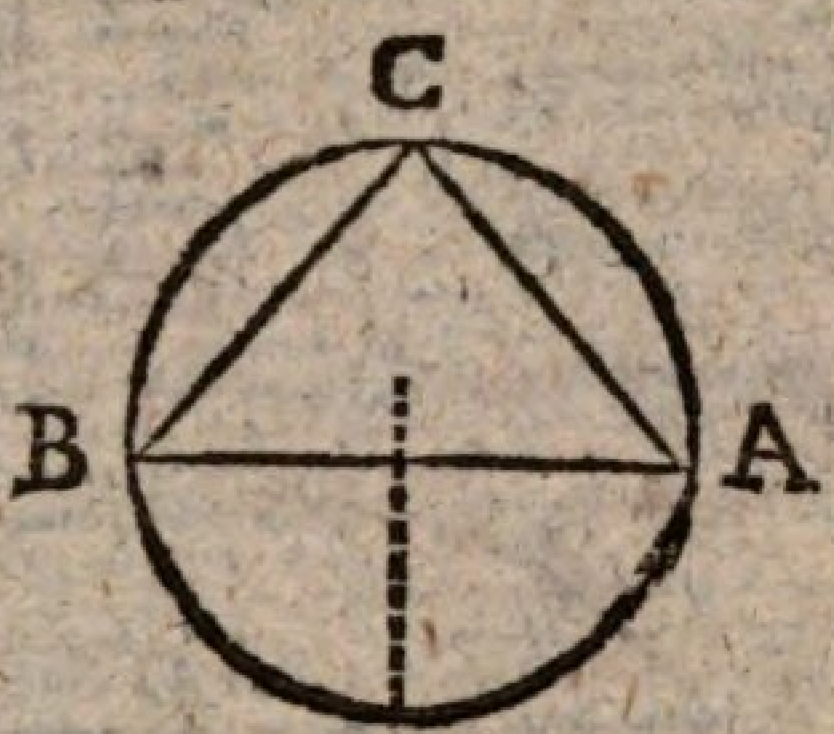
$= 3.$

§ 157.

Zwei und sechzigster Satz.

L. $c = 2b \times \text{Sin.}\ \frac{v}{2}$ (§ 149)

$c : 2b = \text{Sin.}\ \frac{v}{2}$ (A. § 51)



Diese Formel lehrt: Aus dem Halbmesser b, und der Sehne c, den ihr entsprechenden Bogen oder Winkel v finden.

Es sei $b = 1$

$c = 1{,}5867066$

welches ist Bogen v?

S.
$$\begin{aligned} c : 2b &= \text{Sin.}\ v : 2 \\ &= 1{,}5867066 : 2 \\ &= 0{,}7933533 \\ &= \text{Sin.}\ 52^\circ\ 30' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v : 2 &= 52^\circ\ 30' \\ v &= (52^\circ\ 30') \times 2 = 105^\circ \end{aligned}$$

§ 158.

Drei und sechzigster Satz.

L. Welches ist die geometrische Formel für den Inhalt des Dreiekks ABC?

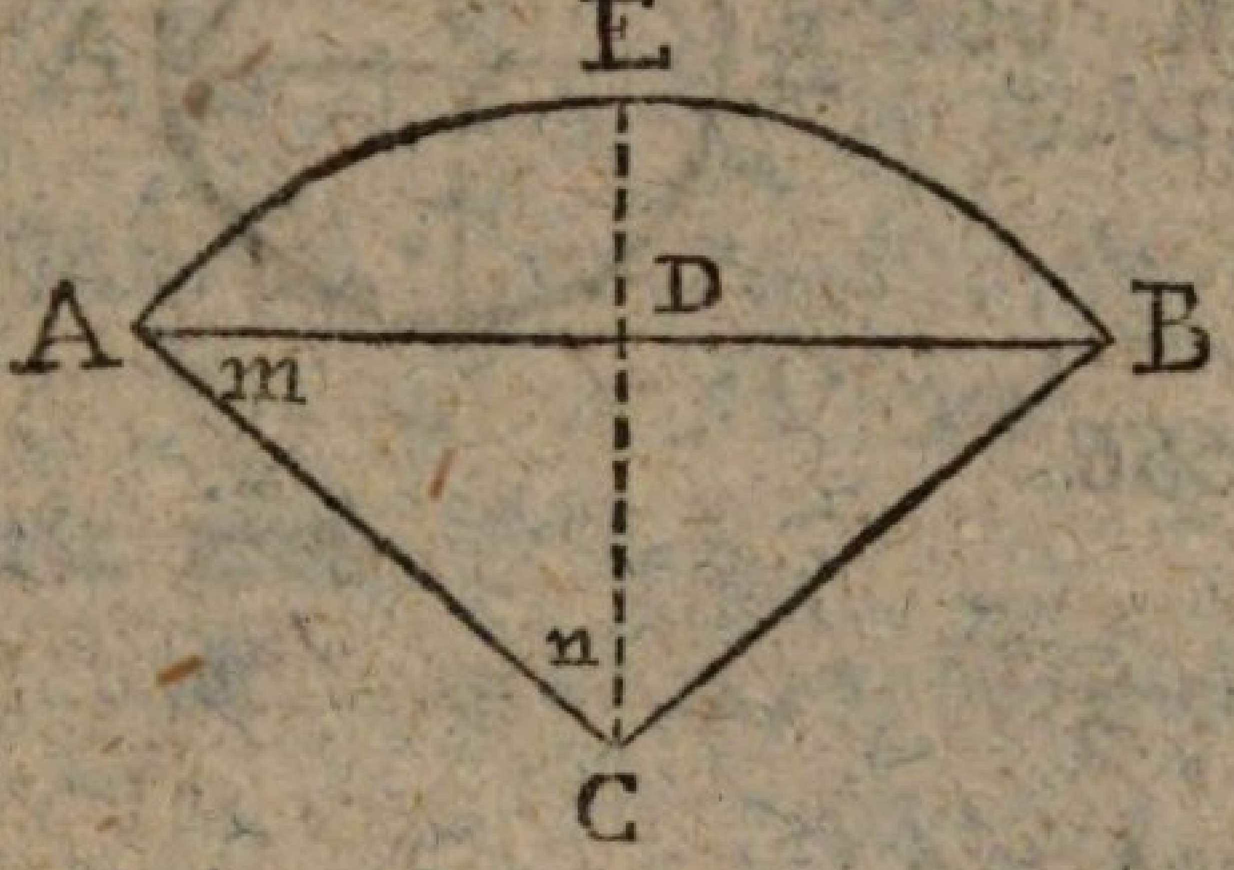
S.
$$\left.\begin{aligned} \triangle ABC &= \tfrac{1}{2}\, AB \times CD \\ &= \tfrac{1}{2}\, CD \times AB \end{aligned}\right\} \text{(G. § 310)}$$

$$\left.\begin{aligned} &= (c:2) \times p \\ &= (p:2) \times c \end{aligned}\right\} \text{(§ 149).}$$

L. Wenn wir nun für c und p gleichlautende trigonometrische Ausdrükke setzen, so lernen wir

den Inhalt eines gleichschenkligen Dreiekks trigonometrisch finden.

S. $\triangle = (p : 2) \times c$
$= (b \text{ Cos. } n : 2) \times 2b \text{ S. } n$ (§ 151. 149)
$= (bb \text{ Cos. } n \times 2 \text{ Sin. } n) : 2$
$= (bb \times \text{Sin } v) : 2$ (§ 153)
$= (bb : 2) \text{ Sin. } v$
$= bb \times \frac{1}{2}\text{Sin. } v.$



L. Wir wollen die Rechnung zuerst geometrisch führen. Es sei
$c = 1{,}5867066,$
$p = 0{,}6087614$
wie wir beide, für den Halbmesser = 1, und den Winkel v = 105°, gefunden haben (§ 149. 151).

S. $(p : 2)\, c = (0{,}6087614 : 2) \times 1{,}5867066$
$= 0{,}3043807 \times 1{,}5867066$
$= 4{,}8296283.$

L. Nun aber die Rechnung trigonometrisch, nach der Formel
$\triangle = (bb : 2) \times \text{Sin. } v$

S. $(bb : 2) \times \text{Sin. } v = \frac{1}{2} \text{ Sin. } 105°$
$= \frac{1}{2} \text{ Sin. } 75°$
$= 0{,}9659258 : 2$
$= 0{,}4829629.$

L. Das war b = 1: aber b = 2 angenommen!

S. Dan ist $(bb : 2) \text{ Sin. } v = 2 \text{ Sin. } 105°$
$= 0{,}9659258 \times 2$
$= 1{,}9318516$

L. Und b = 20?

S. Gibt (bb : 2) Sin. v = 200 Sin. 105°
= 0,9659258 × 200
= 193,18516.

L. Und b = 0,4, und v = 50°!

S. Gibt (bb : 2) Sin. v = 0,08 × 0,7660444
= 0,061283552.

L. Ist b eine mehrziffrige Zahl, so sind die Logarithmen mit Vorteil zu gebrauchen. Hier ist das zwar nicht der Fall, wir wollen aber, der Uebung wegen, das lezte Exempel durch Logarithmen berechnen.

S. Log. Sin. 50° = 9,8842540 — 10
+ Log. 0,08 = 0,9030900 — 2

Log. S. 50° + L. 0,08 = 10,7873440 — 12
= 0,7873440 — 2
= Log. 0,0612835 . .

L. Man ist weniger Irrungen ausgesetzt, wenn man die DecimalBrüche für ganze annimt; hier z. B. 4 für 0,4 sezt. Man erhält dan 6
(bb : 2) Sin. v = 8 × 0,7660444
= 6,1283552
wo die vorderste Ziffer 6 QuadratSchuh bedeutet.

§ 159.

L. Die Formel für das Dreiekk ABC also ist:
$\triangle = bb \times \frac{1}{2}$ Sin. v (§ 155)
Welches ist die Formel für den FlächenInhalt eines ordentlichen FünfEkks = q?

S. q = 5bb × $\frac{1}{2}$ Sin. v (G. § 240).

L. Und für den Inhalt eines ordentlichen VielEkks von n Seiten?

S. q = nbb × $\frac{1}{2}$ Sin. v.

L. Es sei eines andern VielEkks SeitenZahl $= N$, und MittelPunktsWinkel $= V$: welches ist die Formel für dessen Inhalt $= Q$?

S. $Q = NQ \times \frac{1}{2}$ Sin. V.

L. Welches ist nun das Verhältniß zweier VielEkke q und Q zu einander?

S. $q \;..\; Q = (nbb \times \frac{1}{2}\, S.\, v) \;..\; (Nbb \times \frac{1}{2}\, S.\, V)$
$= (n \times S.\, v) \;..\; (N \times S.\, V)$

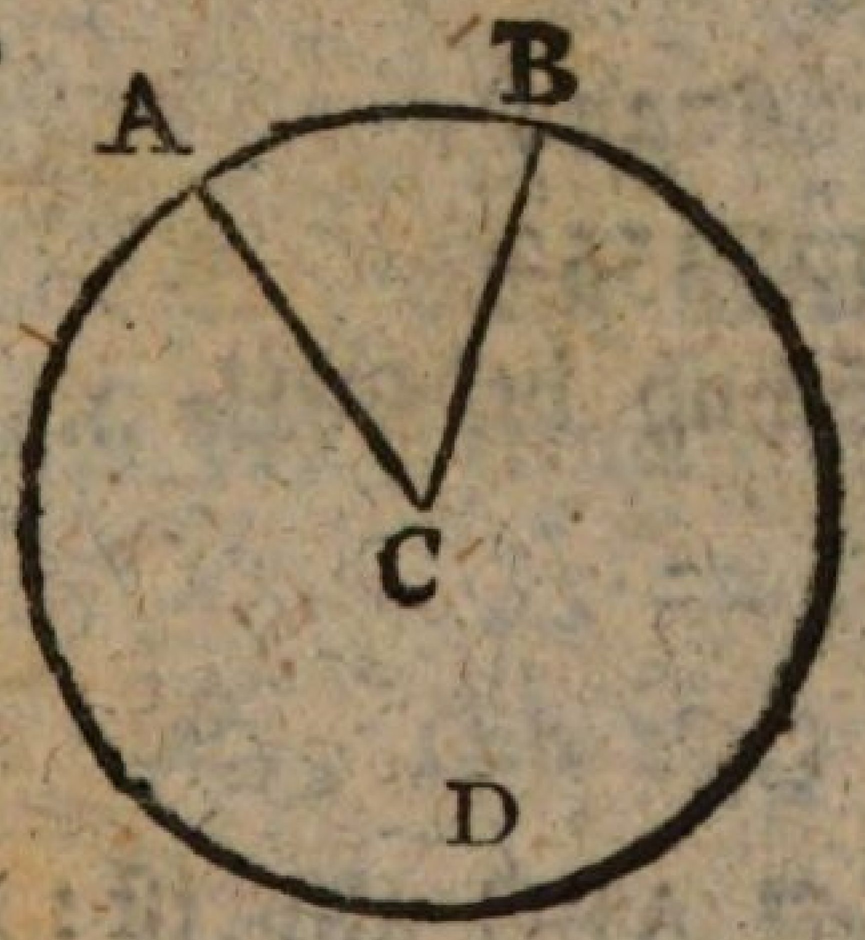
L. Dieses in Worte übertragen = = ?

S. Heißt: Zwei VielEkke verhalten sich zu einander wie die Producte ihrer SeitenZahlen durch ihre MittelPunkksWinkel-Sinusse.

L. Wohl zu merken, jedoch, daß beide ViekEkke gleiche Halbmesser haben.

§ 160.

Vir und sechzigster Satz.



L. Die Berechnung des Ausschnitts ist schon in der Geometrie (§ 340) gelehrt, und sie wird hier nur der Vollständigkeit, und einer bequemen trigonometrischen Formel wegen, wiederholt.

Es sei Ausschnitt ACBA $= \Sigma$
KreisFläche $= f$
Bogen AEB in KreisMaß $= v$
Umfang in KreisMaß $= p = 360°$
welches ist das Verhältniß zu v?

S. $p \;..\; v = f \;..\; \Sigma$ (G. § 340)

L. Und die Formel für den Ausschnitt Σ?

S. $\Sigma = fv : p$
$= rr\,\pi v : p$
$= (bb \times 3{,}14 \times v) : 360°$

L. $= \frac{bb}{2} \times \frac{\pi\, v}{180}$

Aber $v\pi : 180°$ der Ausdrukk für den Bogen v in DecimalTeilen des Halbmessers (S. § 338)

Ist nun $v\pi : 180° = u$,

welches ist dan die Formel für den Ausschnitt?

S. Dan ist $\Sigma = (bb : 2) \times u$.

L. Es sei $b = 4$
$v = 50°$.

S. $\Sigma = (bb : 2) \times u$
$= (bb : 2) \times (v\pi : 180°)$
$= (16 : 2) \times (50\,\pi : 180°)$
$= 8 \times (5\,\pi : 18)$
$= 4 \times (5\,\pi : 9)$
$= (20 \times 3{,}14159) : 9$
$62{,}83180 : 9$
$= 6{,}981317$ ::

L. ~~Wie~~ Wann b = 0,4 gewesen, so bedeutet die Zahl 6 vor dem Strich, auch Schuh (§ 158); und würde nach der gewöhnlichen Art, da man] Ruten für Ganze annimt, geschrieben werden :: ?

S. 0,0698131 ::

L. Noch ein Exempel zur Uebung!

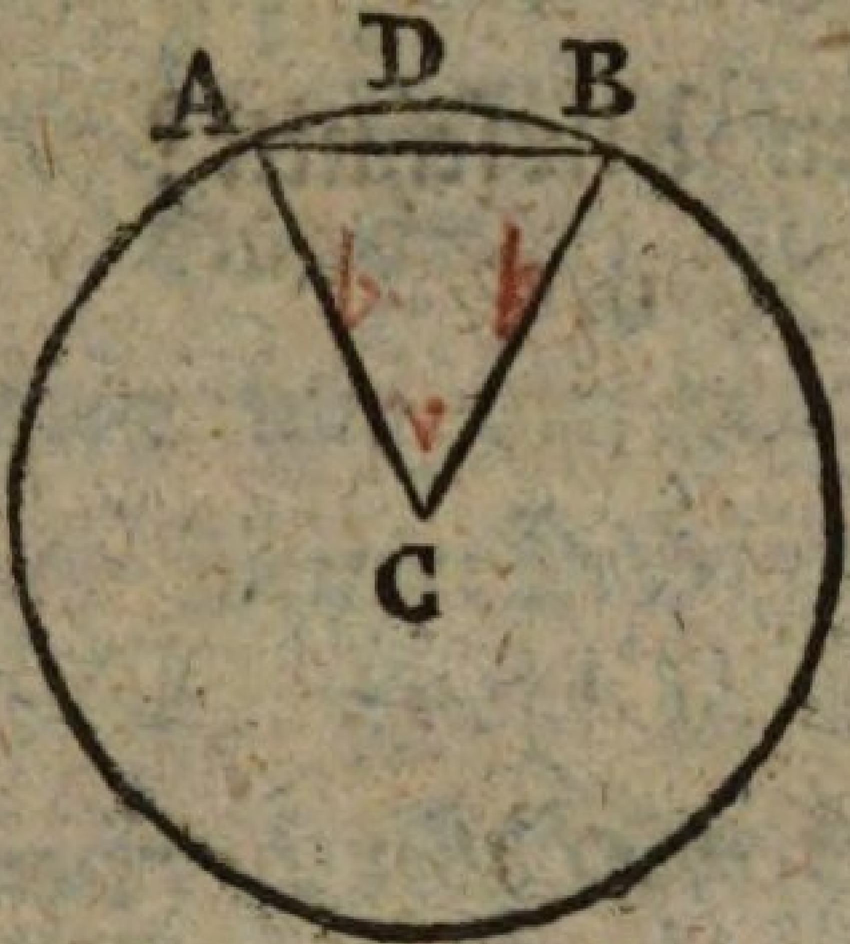
Es sei $b = 1$
$v = 105°$.

S. $\Sigma = (bb : 2) \times u$
$= (1 : 2) \times (v\pi : 180°)$
$= \frac{1}{2} \times (105° \times 3{,}14 : 180°)$
$= (105 \times 3{,}14) : 360$
$= 0{,}916297$ ::

L. Aus dieser Rechnung erhellt zugleich, daß für b = 1 der Ausschnitt Σ = u : 2 ist.

§ 161.

Fünf und sechzigster Satz.



L. Wir wissen das Dreiekk $\triangle$, wir wissen auch den Ausschnitt Σ zu finden, wie wird nun der Abschnitt S = ADBA gefunden?

S. $S = \Sigma - \triangle$ (G. § 341).

L. Sind Σ und $\triangle$ schon bekant, so ist dieses Verfahren freilich das kürzeste um S zu finden: aber S kan auch gefunden werden, ohne Σ und $\triangle$ zu kennen, und dazu müssen wir eine Formel suchen.

S. $\Sigma - \triangle = \frac{bb}{2} \times u - \frac{bb}{2} \times$ S. v (§ 160. 158)

$= (u - \text{Sin. } v)\ \frac{bb}{2}$ (A. § 152).

L. Der Ausschnitt S also wird gefunden, woraus?

S. Aus dem Halbmesser b, und dem MittelPunktsWinkel v.

L. Es sei b = 4

v = 50°

welches ist S?

S. Zuerst wil ich u suchen.

$u = v\pi : 180°$

$= (50 \times 3{,}14) : 180°$

$= (5 \times 3{,}14159) : 18$

$= 15{,}70795 : 18$

$$u = 0{,}8726646$$
$$\text{Sin. } v = 0{,}7660444$$
$$u - \text{Sin. } v = 0{,}1066202$$
$$bb : 2 = 8$$
$$(u - \text{Sin. } v)\tfrac{bb}{2} = 0{,}8529616.$$

L. Ist b eine vielziffrige Zahl, so kan man sich auch hier der Logarithmen mit Vorteil bedienen.

S. $\text{Log. } 0{,}1066202 = 0{,}0278395 - 7$
$\text{Log. } 8 = 0{,}9030900$
$\text{Log. } 0{,}10662 + \text{Log. } 8 = 0{,}9309295 - 7$
$= \text{Log. } 0{,}8529617.$

L. Nun zur Probe die Rechnung auch nach der Formel:

$$S = \Sigma - \Delta!$$

S. $\Sigma = 6{,}981317$ (§ 160)
$\Delta = 6{,}128355$ (§ 158)
$\Sigma - \Delta = 0{,}852962 = S.$

L. Gesetzt aber ich verlangte den Inhalt des grössern Abschnitts, dessen MittelPunktsWinkel grösser ist als zwei rechte Winkel?

S. Dan durfte man nur den kleinen berechnen, und ihn vom Inhalt des Kreises abziehn.

$u = \overset{rr}{2r}\,\pi v : 360^\circ$ (G. § 338)
$= \pi v : 180^\circ$ (A. § 113)
$= (3{,}14 \times 50^\circ) : 180^\circ$
$= (3{,}1415926 \ldots \times 5) : 18$
$= 15{,}7079630 \ldots : 18$
$= 0{,}8726646 \ldots$
$\text{Sin. } v = 0{,}7660444$
$u - \text{Sin. } v = 0{,}1066202$
$bb : 2 = 8$
$(u - \text{S. } v)\tfrac{bb}{2} = 0{,}8529616.$

L. Auch hier kan man sich, wenn b eine grosse Zahl ist, mit Vorteil der Logarithmen bedienen.

S. Log. 0,1066202 = 0,0278395 − 7
+ Log. 8 = 0,9030900
= 0,9309295 − 7
= Log. 0,85296176.

L. Nun, zur Probe, die Rechnung nach der Formel

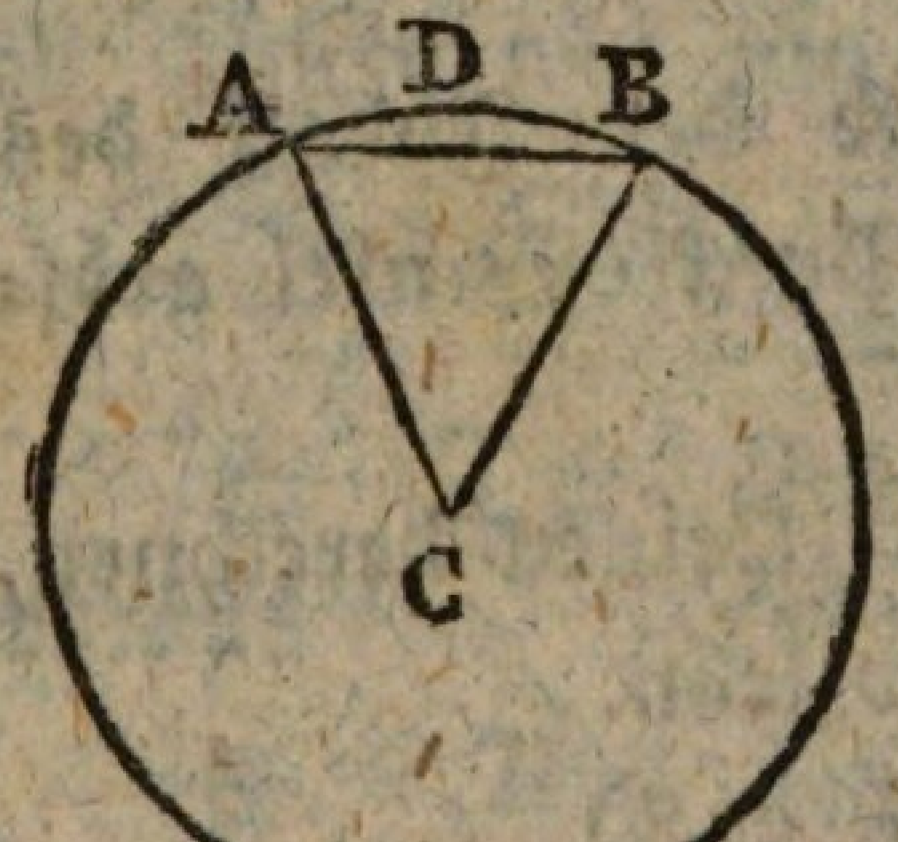
$$S = \Sigma - \triangle.$$

S. $\Sigma = 6{,}981317$ (§ 160)
$\triangle = 6{,}128356$ (§ 158)
$S - \triangle = 0{,}852961 = S.$

L. Gesetzt aber ich verlangte den grössern Abschnitt, dessen MittelPunktsWinkel v grösser ist als zwei rechte Winkel?

S. Dan müste man den kleinern berechnen, und ihn vom Inhalte des Kreises abziehn.

§ 162.



L. Der Ausschnitt Σ ist aus zwei Stükken zusammengesetzt: welches sind die?

S. Das Dreiekk △, und der Abschnitt S.

L. Da sich nun Dreiekk und Abschnitt besonders berechnen lassen (§ 158. 161); so folgt daraus, daß man den Ausschnitt noch auf andre Art finden kan als wir ihn § 161 haben. Und wie?

S. Wenn man Dreiekk und Abschnitt berechnet, und sie addirte

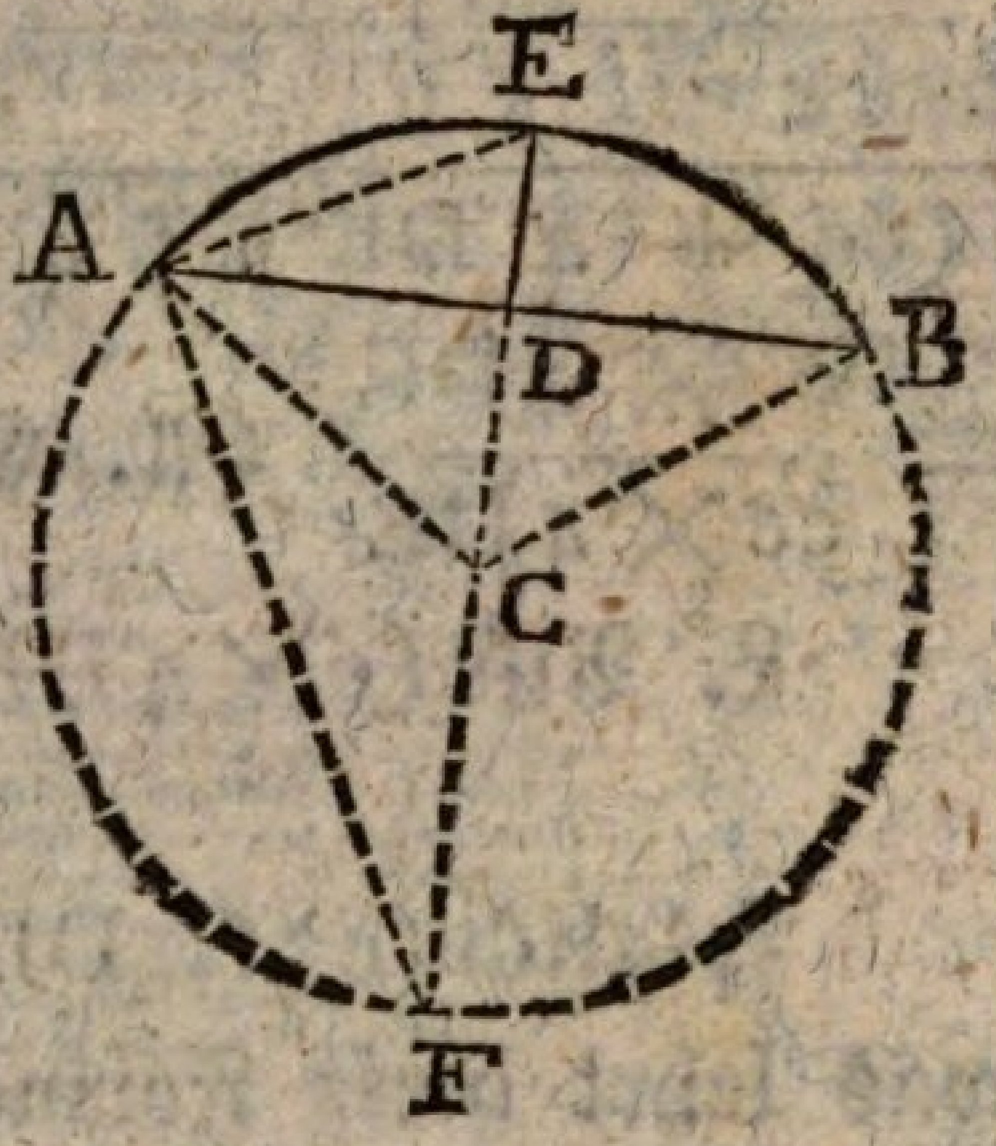
$$\triangle + S = \Sigma.$$

L. Und hat man Tafeln bei der Hand, welche u in DecimalTeilen des Halbmessers angeben; so ist diese VerfahrungsArt vorteilhaft.

§ 163.

Sechs und sechzigster Satz.

L. In einem Kreise wird eine Sehne AB gezogen, welche von dem Durchmesser EDCF senkrecht geschnitten wird. Wenn man nun noch die Linien AE, AF zieht, was für einen Winkel machen die mit einander bei A?



S. Einen rechten (G. § 199).

L. Und wie ist das Verhältniß der Linien DE, AD und DF zu einander?

S. $DE \,..\, AD = AD \,..\, DF$ (G. § 265)

$AD^2 : DE = DF$ (A. § 294)

$(AD^2 : DE) + DE = DF + DE$ (G. § 36)

$= EF$

$= 2\,CE$ (G. § 168, 166)

$= (\frac{c}{2})^2 : DE + DE = 2\,b$

$$\left.\begin{array}{l} = \dfrac{cc}{4\,DE} + DE \\ = \dfrac{cc + 4\,DE^2}{4\,DE} \end{array}\right\} = 2\,b$$

$$\frac{c \times 4\,DE}{cc + 4\,DE^2} = \frac{c}{2b}.$$

L. Wie folgt dieses lezte aus dem unmittelbar vorhergehenden?

S. $\frac{cc + 4\,DE^2}{4\,DE} = 2\,b$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{(cc + 4\,DE^2) : 4\,DE} = \frac{1}{2b} \\ \frac{c}{(cc + 4\,DE^2) : 4\,DE} = \frac{c}{2b} \end{array}\right\}$$ (A. § 51)

$= \frac{c \times 4DE}{cc \times 4DE^2}$ (A. § 83).

L. Also $(c \times 4\,DE) : (cc + 4\,DE^2) = c : cb = \text{Sin.}\frac{v}{2}$ (§ 155)

folglich $(c \times 4\,DE) : (cc + 4\,DE^2) = \text{Sin.}\frac{v}{2}$ was lehrt diese Formel?

S. Einen Bogen AEB = v aus seiner Sehne AB = c, und Höhe DE zu finden.

L. Es sei c = 1,5867066
DE = 0,3912385
wie groß ist der Winkel v?

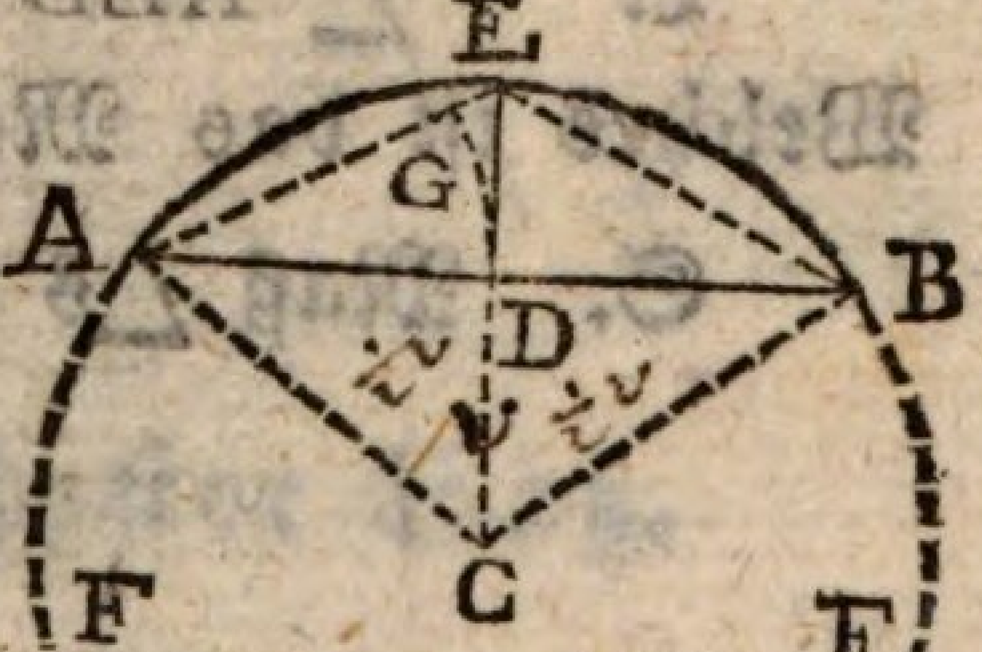
S. 4 DE = 1,5649540
Log. 4 DE = 0,1945006
+ Log. c = 0,2004962
Log. 4 DE + Log. c = 0,3949968
= Log. (c × 4 DE).

L. Das ist der Dividendus. Nun den Quotienten?

S. Log. c = 0,2004962
Log. cc = 0,4009924 (A. § 328)
cc = 2,51763
Log. DE = 0,5924420 — 1 (A. § 356)
Log. DE^2 = 1,1848840 — 2
= 0,1848840 — 1
Log. 4 = 0,6020600

$$\text{Log. } 4\ DE^2 = 0{,}7869440 - 1$$
$$4\ DE^2 = 0{,}612271$$
$$4\ DE^2 + cc = 3{,}029901$$
$$\text{Log. } (4\ DE^2 + cc) = 0{,}4955305$$
$$\text{Log. } (c \times 4\ DE) = 1{,}3949968 - 1 \text{ (A. § 358)}$$
$$\text{L. }(c \times 4 DE) - \text{L. }(4 DE^2 + cc) = 0{,}8994663 - 1$$
$$= \text{Log. Sin. } 52^{\circ}\ 30' \text{ (§ 95)}$$
$$= \text{Log. Sin. } v : 2$$
$$\text{folglich } v : 2 = 52^{\circ}\ 30'$$
$$v = (52^2\ 30') \times 2$$
$$= 105^{\circ}$$

§ 164.



L. Sehne AB, und Halbmesser CDE, schneiden einander senkrecht, wie vorhin (§ 157): welcher der Bogen AE und BE ist der gröste?

S. Bogen AE = Bogen BE (G. § 177. 208).

L. Und die Linie AE und BE?

S. Linie AE = Linie BE (G. § 206).

L. Und Winkel ACE?

S. $\angle$ ACE = $\angle$ BCE (G. § 214).

L. Wenn also $\angle$ ACB = v,

so ist $\angle$ ACE = $\angle$ BCE = $\frac{v}{2}$.

Wenn man nun mit dem Halbmesser AD, aus A, einen Kreisbogen DG zieht, was ist dan DE, in Hinsicht auf den Winkel DAE, oder den Bogen DG?

S. DE = Tangente Bogens DG (§ 29) der Tangente Winkels DAE (§ 59).

L. Wie groß sind die Winkel DAE und AED zusammen?

S. $\angle$ ADE = ∟ (G. § 47);

folglich $\angle$ DAE + $\angle$ AED = ∟ (G. § 119).

L. Die Winkel DAE und AED sind also einer des andern Ergänzung. Wenn also DE Tangente des Winkels DAE ist, was ist sie in Hinsicht auf den Winkel AED?

S. DE ist Cotangente $\angle$s AED (§ 43).

L. Für welchen Halbmesser?

S. Für den Halbmesser AD (§ 108).

L. Welcher von den Winkeln AED und BED ist der größte?

S. $\triangle$ ADE $\cong$ $\triangle$ BDE (G. § 56. 63)

$\angle$ AED = $\angle$ BED (G. § 24).

L. $\angle$ AED = $\angle$ BED = $\frac{1}{2}$ $\angle$ AEB

Welches ist das Maß des Winkels AEB?

S. Maß $\angle$s AEB = $\frac{1}{2}$ Bogen AFB (G. § 226)

$= (360^\circ - v) : 2$

$= 180^\circ - \frac{v}{2}$

L. $\angle$ AED = $(180^\circ - \frac{v}{2}) : 2$

$\angle$DAE = + $\frac{v}{4}$ $= 90^\circ - \frac{v}{4}$

Nimt man nun AD = r = 1

und DE = Tg. EAD = Cotang. AED;

so ist

AD .. DE = r .. Tang. EAD

= 1 .. Cotang. AED

= 1 .. Tang (v : 4)

Folglich Tang. $\frac{v}{4}$ = DE : AD (A. § 294)

= 2 DE : 2 AD (A. § 274)

= 2 DE : AB

= 2 DE : c.

Dieses ist also eine zweite Auflösung der vorigen Aufgabe: Aus der Sehne und Höhe eines Bogens den Bogen selbst zu finden (§. 163). — Es sei, wie vorhin (§ 160)

$$c = 1{,}5867066$$
$$DE = 0{,}3912385$$

Wie groß ist der Winkel v?

S. $2\ DE = 0{,}7824770$

Log. $2\ DE = 0{,}8934717 - 1$

\- Log. $c = 0{,}2004962$

Log. $2\ DE$ — L. $c = 0{,}6929755 - 1$

= Log. Tang. $26^\circ\ 15'$

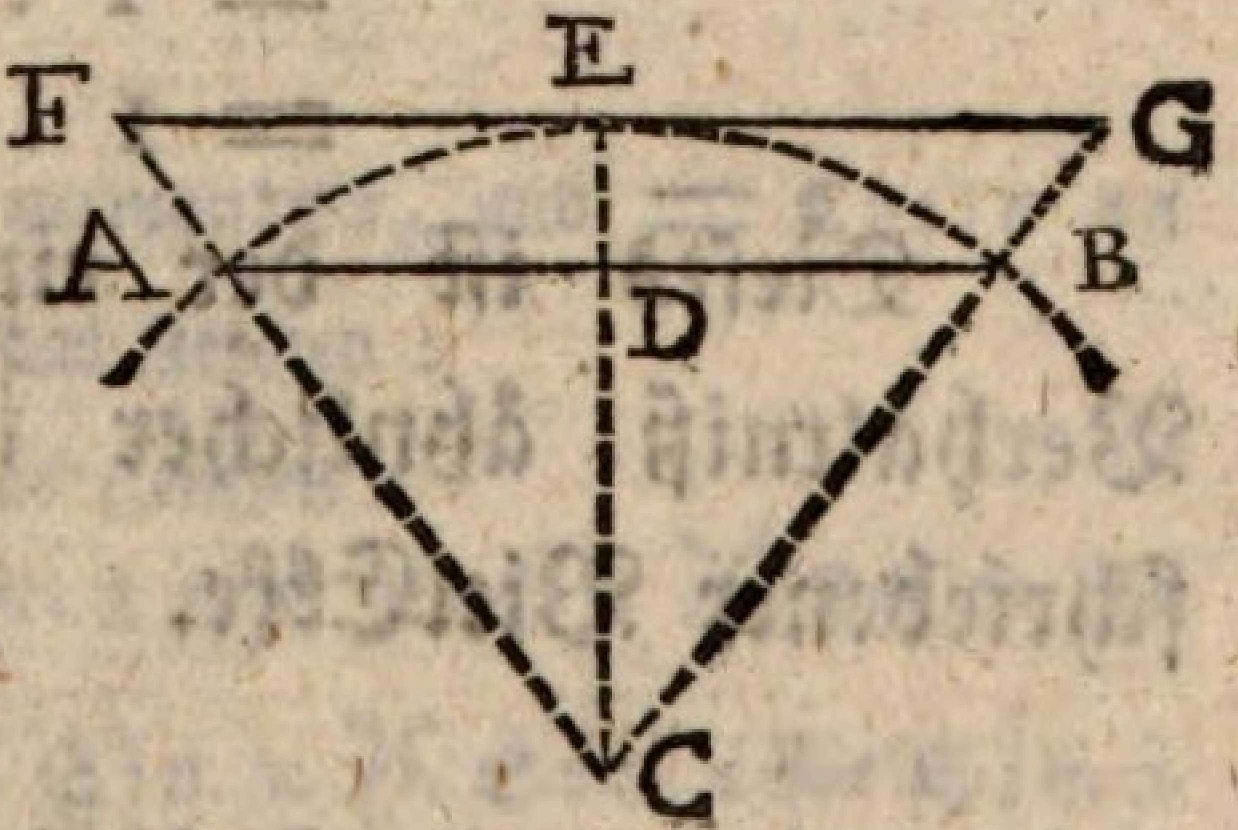
= Log. Tang. $v : 4$

$$v : 4 = 26^\circ\ 15'$$

$$v = 105^\circ.$$

§ 165.

Sieben und sechzigster Satz.



L. Es sei $AB = c$ die Seite eines ordentlichen in den Kreis beschriebenen VielEkks; und die ihr gleichlaufende $FG = e$ die Seite eines dem vorigen ähnlichen, um den Kreis beschriebenen VielEkks: welches ist das Verhältniß ihrer Seiten c und e zu einander? — Es werden HülfsLinien CAF, CBG, CDE, und zwar die lezte senkrecht auf AB, gezogen. Wie steht sie nun auf FG?

S. Auch senkrecht (S. 115).

L. Und wie teilt sie den Winkel C = v?

S. In zwei gleiche ECF = ECG = $\frac{v}{2}$.

L. Und die Linie AB?

S. AD = BD (G. § 177).

L. Und FG?

S. FE = GE: denn △ FCE ≅ △ GCE (G. § 96).

L. Welche trigonometrische Bedeutung hat die Linie AD = $\frac{c}{2}$?

S. $\frac{c}{2}$ = und Sinus $\frac{v}{2}$ (§ 1).

L. Und $\frac{e}{2}$?

S. $\frac{e}{2}$ = Tang. $\frac{v}{2}$ (§ 29).

L. Und zwar beide für den Halbmesser CA = b.

Folglich AD = $\frac{c}{2}$ = b Sin. $\frac{v}{2}$
und FE = $\frac{e}{2}$ = b Tang. $\frac{v}{2}$

Folglich AB = c = 2b Sin. $\frac{v}{2}$
und FG = e = 2b Tang $\frac{v}{2}$

Folglich C .. e = 2b Sin. $\frac{v}{2}$ .. 2b Tang. $\frac{v}{2}$
= Sin. $\frac{v}{2}$ .. Tang. $\frac{v}{2}$ (A. § 274)
= Sin. $\frac{v}{2}$ .. (Sin. $\frac{v}{2}$: Cos. $\frac{v}{2}$) (§ 51)
= 1 .. (1 : Cos. $\frac{v}{2}$ (A. § 274)
= 1 .. Sec.. $\frac{v}{2}$ (§ 51).

Dieses ist der einfachste Ausdrukk für das Verhältniß ähnlicher in und um den Kreis beschriebener VielEkke.

Verbesserungen
zum vierten Theil.

Seite 6, Zeile 7 v. u. steht S. für G
— 9, fehlt in der Zeichnung der Buchstab B
— 16 ist hinzusetzen: S. § 331
— 11, — 3 v. u. steht nun für nur
— 12, — 3 v. u. steht DF für DS
— 13, letzte Zeile steht unter für an
— 14, — 4 steht LR für CR
— 15, l. Z. steht der andern für die andre
— 16, — 13 steht $\angle$ für $\triangle$
— 20, — 9 steht TGZ für TZ
— 23, — 7 v. u. gehört er ans Ende der Zeile
— 25, — 14 steht $r\sqrt{\tfrac{3}{2}}$ für $r\sqrt{\tfrac{3}{2}}$
— 20 steht $\sqrt{3:2}$ für $\sqrt{\tfrac{3}{4}}$
— 27, — 4 v. u. steht nicht für auch
— 29, — 2 ist $\sqrt{}$ wegzustreichen
— 30, — 2 v. u. steht ihm für ihn
— 32, sind in der ersten Zeichnung die Durchschnitte von DM mit n, und die von RH mit c zu bezeichnen.
§. 31, steht in seiner g. Abhandlung für in seinen g. Abhandlungen.
— 39, — 3 steht DM für D, und C für M
— 5, 6 ist gemein auszustreichen
— 40, — 10 steht DSs für Dsf
l. Z. steht zwei Mal Tangente für Secante, und ein Mal DsHs für DSHs
— 43, — 14 steht die für den
— 44, — 11 ist 0, 5 wegzustreichen
— 3 v. u. steht CDr: für CD
— 45, — 2 steht § 35 für § 38
— 46, — 13 steht § 36 für § 38
bei § 2 ist die Zeichnung § 40 zu wiederholen
— 47, steht § 35 für § 38, und § 37 für § 40
— 51, — 9 ist hinter r einzuschieben = r
— 13. u. Z. 18 sind § 36 u. § 35 in § 38 zu verwandeln
§ 50, — 5 steht von für in
— 55, — 8 steht § 41 für § 42
— 56, — 5 steht : r für : 2
— 6 steht § 6 für § 5
— 29 ist § 29, 30 in § 38 zu verwandeln, und = Cosin 45 wegzustreichen
— 30 fehlt hinter Sin 60° das Zeichen :
— 32 steht § 45 für § 46
— 4 v. u. fehlt hinter r r das Zeichen :
— 56. In der Tabelle Colunme 3 Zeile 3 steht Cos. x × Tg. x für Cos. x : Tg. x.
Col. 3 Z. 18 v. u. steht Sin. x × Sec. x für Sin. x : Sec. x.
— 2 Z. 4 v. u. steht rr : Sin. x für rr Sin. x.
— 58, — 1, 2 ist das lezte x, u. Z. 5 das erste x, in α zu verwandeln.
— 59, — 5 steht dS für ds
— 7 v u steht für für sind
— 61, — 11 steht § 93 für § 54
— 16 ist das lezte v in V zu verwandeln
§ 58, sind in der Zeichnung die Buchstaben n und d verwechselt

Seite 64, Zeile 14 steht § 5 für § 57
— 19 steht vor für von
— 68, — 2 ist eins der beiden Zeichen $=$ wegzustreichen
— 3 steht [für §
— 70, — 20 muß stehn: $= (1{,}41421356 \times 2{,}73205080) : 4$
— 71, — 4 steht den für dem
— 72, — 13 steht der Linie für den Linien
— 3 v. u. steht EF für EI
— 75, — 7 v. u. steht ändern für trigonometr. Namen geben
— 10 v. u. steht CBN für CBn
— 77, — 14 ist das mittelste $\times$ in $+$ zu verwandeln
— 15 steht § 62 für § 61
— 78, — 9 ist das zweite $+$ in $\times$ zu verwandeln
— 79, — 8 fehlt hinter (§ 62) das Zeichen $=$
— 12 ist das zweite $\sqrt{}$ wegzustreichen, und 15° in 75° zu verwandeln
— 80, — 11 steht 2 z für 2 x
— 6 v. u. steht gehaltenen für enthaltenen
— 82, — 13 steht (x—y) für Cos. (x—y)
— 83, — 6 steht 4 für 4^2
— 14 u. 21 steht $\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{4}$ für $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2$
— 84, — 11 steht zwei Mal y für x
— 85, — 8 ist $\sqrt{3}$ in $\sqrt{2}$ zu verwandeln, und 4×4 wegzustreichen
— 9 u. 10 steht $\sqrt{3}$ für $\sqrt{2}$
— 86, — 4 u. 8 v. u. steht Sin. z für Sin $\frac{z}{2}$
— 87, — 7 steht $\frac{\sqrt{rr - r\,\mathrm{Cos.}\,z}}{2}$ für $\sqrt{\frac{rr - r\,\mathrm{Cos.}\,z}{2}}$
— 89, — 5 v. u. ist § 63 für § 64 verwechselt
— 2 v. u. steht 2 (. x für 2 (C. x
— 92, — 10 steht § 62 für § 63
— 13 ist das erste und lezte y in x zu verwandeln
— 93, — 9 v. u. ist von den beiden ersten Nullen eine wegzustreichen
— 95, — 4 steht § 63 für § 64
— 96, — 7 v. u. ist das Zeichen — wegzustreichen
lezte Zeile steht $=$: für $= 2$
— 97, — 1 ist das zweite $=$ in — zu verwandeln
— 4 steht § 35 für § 32
— 99, ist Zeile 8, nebst dem Striche darüber, wegzustreichen, und dafür zu setzen:

$$= \frac{(\mathrm{Sec.}\ 2x - 1)^2 : (\mathrm{Sec.}\ 2x - 1)}{[(\mathrm{Sec.}\ 2x^2 - 1] : (\mathrm{Sec.}\ 2x - 1)}$$

$$= \frac{\mathrm{Sec.}\ 2x - 1}{\mathrm{Sec.}\ 2x + 1}$$

— 10 in dem Nenner ist — in $+$ zu verwandeln
— 12 ist Sin in Sec. zu verwandeln
— 13, u 14 steht dan und welcher für da und welchen
— 102, — 11 steht 46 für 45 —
§ 81, — 6 ist L. auszustreichen
— 107, l. Z. steht Erzeugung für Ergänzung
— 108, — 10 v. u. ist 1 wegzustreichen
— 4 v. u. steht die ersten lezten für ersten und lezten
— 110, — 1 u. 4 steht .. $=$ für .. 1 $=$
— 113, — 10 ist $=$ (32, 4)″ wegzustreichen
— 114, — 4 v. u. steht (§ 79, 80, 81) für (§ 80, 81, 82)
— 116, — 6 steht AB für AF
— 7 v. u. steht 60° für $60'$

Seite 117, Zeile 1 steht § 80 für § 81

— 3, 4 steht für den Zuwachs der Anwüchse statt: dem Zuwachs der Sinusse.

— 8 steht gleichsam für gleichmässig

— 10 steht AF für AE

— 12 steht NL für ML
In der Zeichnnng ist das obere F in N zu verwandeln, das untere F aber höher zu rücken.

— 118, — 5 v. u. fehlt zu Anfange der Zeile das Wort in

— 122, — 3 ist hinter die, der einzuschieben

— 2 v. u. fehlt hinter eines das Wort nicht

— 123, — 19 steht 2467 für 2447

— 3 v. u. steht 0, 12354 für 0, 13254

— 124, — 4 ist die Zahl 1292 um eine Ziffer weiter rechts zu rücken

— 126, — 15 steht zwanzig für neunzehn

— 16 ist oder 100° auszustreichen

— 17 steht anwendbar für nicht anwendbar

— 128, — 8 steht Snd für Sn

— 9 steht B für BCH

§ 105, — 2 steht § 99 für § 101

§ 106, — 10 steht diese Sehnen, SA, halben für die Sehne SAs.
Auch gehört die zweite Zeichnung, an welcher R fehlt, ans Ende des §s.

Seite 137, Zeile 4 v. u. muß lauten: 1, 8030827 = Log. 63, 54 : : Der KunstGriff A. § 348, gibt auch hier 63, 54519 : :

— 138, — 3 steht × 860491 für × 8601491

— 139, — 17 ist § 60 wegzustreichen

§ 113, — 2 steht sucht man wohl für pflegt man wol

— 143, — 11 v. u. ist was hinter und folgt, so zu berichtigen: von den beiden aus C nach den Durchschnitts-Punkten gezogenen Linien BC macht die eine einen stumpfen, die andre einen spitzen Dreiekkswinkel.

§ 116, — 13 ist DB und AC in AE zu verwandeln

— 146, — 4 v. u. steht ABC für ABE

— 148, — 19 steht § 113 für § 116

— 152, — 18 steht Tangente für Sinus

— 23, 24 u 29 steht 10000000 für 1,0000000

— 24 steht 0, 49997884 für 4,9997884

— 26, 28, 29 steht 1250001 : : für 1,250001 :

— 153, — 6, 7, 8 gelten die zu vor S. gemachten Berichtigungen

— 156, — 12 v. u. steht × für +

— 7 v. u. steht der für die

— 2 v. u. steht auf für von

§ 124, lezte Zeile fehlt zwischen 2″9 das Zeichen =

— 160, — 12, 13 steht seinen Cosinus sehen; für einen ihm gleichen Cosinus sezen.

— 15 steht Cosin. = für Cosin. n =

— 5 v. u. steht h für n

§ 126, — 4, u. 5 v. hinten ist die Tangente des Winkels wegzustreichen

— 168, — 7 v. u. ist hinzuzufügen: sei BA = c = 4; und AH = b Cos. A = 5 Cos. 126° 52′ 12″; so ist:

— 7, 6, 5 v. u. ist 5 und was weiter folgt, einzuklammern

— 2, 3 v. u. ist hinzuzufügen (A § 131)

— 169, — 8 ist × wegzustreichen

— 10 steht 53 für 51 u. Z 12 a für b

— 170, — 2, u. 3 sind b u. c verwechselt

— 8 steht C und $\frac{b}{c}$ für B, und $\frac{c}{b}$

— 14, 15 ist C, welcher dort A hieß, wegzustreichen

— 171, — 6 steht 584 für 464

— 8, 9 steht 40 für 620

— 10 steht 37′35″ für 31′32″

§ 130, Zeile 1, 7, 9 steht 53 für 51

— 2 steht $\frac{1}{1} \; \frac{: \text{Sin. A}}{c : b}$ für $\frac{1}{1} \div \frac{\text{Sin. A}}{c : b}$

— 7 steht $: \frac{c}{b} \; \frac{\text{Sin. A}}{1} =$ für $\frac{c}{b} \div \frac{\text{Sin. A}}{1}$

In den beiden lezten Zeilen ist wieder b u. c verwechselt.

Seite 172, Zeile 3 steht C für B

— 4 steht 15″ für 10′

vorlezte Zeile steht $x^2)^2$ für $x)^2$

— 7 v. u. steht C^2 für c^2

— 173, — 12, 13 ist wieder b und c verwechselt

— 175, — 6 v. u. steht $c^2)\ 2bc$ für $c^2) : 2bc$

— 177, — 4 steht 262 für 162

§ 136, — 4 steht BA für BH, und $- \frac{aa}{2c}$ für $+ \frac{aa}{2c}$

— 180, — 6 muß das zweite a ein Verneinungszeichen vor sich haben

— 8 steht Cos. = für Cos. A =

— 9 steht $+ cc - aa$ für $- cc + aa$

— 181, — 3 u. 4 steht 0,8025946 für 0,8025946 — 1

— 182, — 2 steht 10, für 9,

— 186, — 18 ist 5×7 einzuklammern

— 2 v. u. steht 2, 8 für 5, 6

— 187, — 16 steht 60 für 44‴

— 19 steht 8‴ für 48‴

— 2 v. u. steht Vir für Vier

— 188, — 3 steht $BC^2\ BE^2$ für BC^2 und AE^2

— 190, Die Zeichnung gehört auf die folgende Seite, hinter Z. 7

— 193, — 5, u. 6 steht 1,4127732 = Log. 25,868 für 1,4227732 = Log. 26,471

— 194, — 2 steht 25,868 für 26,471

Dieser Irrthum hat auf die ganze folgende Rechnung dieses §s Einfluß, welche, hiernach berichtigt: AB = 30,72 gibt

— 196, — 4 v. u. ist $\times$ in $=$ zu verwandeln

§ 147, — 4 steht a = a für a = b

— 8 steht ac für cc

— 200. — 5 steht 266603 für 301270::

— 6 steht 889064 für 88675::

$= a : \sqrt{3} = 5 : 1{,}7320508$::

— 202, — 7 steht das Product für das doppelte Product.

— 203, — 12 steht zwischen für von

— 207, — beide lezte Zeilen sind zu berichtigen: Zur Ueb. w. wir Sinus V auch durch Logarithmen suchen.

— 208, — 4 steht 50° für 52°

— 5 v. u. steht 795: für 793:

— 209, — 10 steht 3826824 für 3826834

— 11 steht 764,3648 für 7653668

— 211, — Die Zeichnung § 157 fällt weg, zu § 158 aber wird die § 153 wiederholt.

— 215, — 20 steht Wie für Wäre, und bedeutet für bedeutete

— 217, — 10 v. u. steht $^2r\,\pi v$ für $r\,r\,\pi v$

— 220, — 4 steht $cc \times 4\,DE$ für $cc + 4\,DE^2$

$\frac{c \times 4\,DE}{cc \times DE}{}_2$ für $\frac{c \times 4\,DE}{cc \times DE}$

— 221, — 3 steht 3,02 9901 für 3,129901

l. Z. steht oer für oder

— 222, ist zwischen Z. 22 u. 23 einzuschalten: $\overline{\angle DAE = + \frac{v}{4}}$

— 224, — 10 ist und auszustreichen.